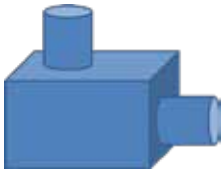
LA MACCHINA SPUTANUMERI (MSN)

[Collegamento con il Cap.4 *Cercare, interpretare, rappresentare regolarità*]

Battezzata così dai primi alunni che l'hanno sperimentata, è un artefatto che permette di introdurre una strategia potente, basata sull'uso di un'opportuna rappresentazione tabulare, per affrontare le situazioni che comportano una ricerca di regolarità. La utilizziamo per favorire il passaggio dalla visione *sequenziale* di una successione alla sua visione *funzionale.*

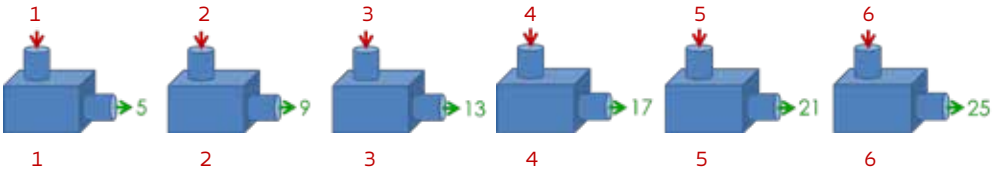
Spesso gli alunni incontrano difficoltà nel comprendere il senso della ricerca della relazione che collega due variabili. Prima che una questione di strategia, furbizia, intuizione, utilizzo di esperienze precedenti, gusto del tentativo, propensione al non arrendersi (che pure sono importanti, anzi, necessari), c'è l'aspetto di fondo del dotarsi di un abito mentale che permetta (anche all'insegnante, se non ha confidenza con questo tema) di capire come collocarsi di fronte a una situazione problematica di questo tipo. La MSN favorisce questo abito mentale, generando situazioni che hanno il sapore della sfida.

L'insegnante introduce la MSN:



spiegando che 'macchine' come questa, costruite con scatole e tubi di cartone, sono spesso usate nei primi anni della scuola primaria, e probabilmente gli alunni stessi le hanno già incontrate. Favoriscono la comprensione di concetti matematici astratti rendendo l'apprendimento più divertente e coinvolgente.

Nel tubo verticale si introducono in sequenza dei numeri, per ognuno dei quali la MSN 'sputa' un numero dal tubo orizzontale. Gli alunni devono capire come funziona la MSN: cosa 'fa' per trasformare il numero in entrata in quello in uscita? Può eseguire una sola operazione alla volta, ma anche più operazioni in sequenza (noi rimarremo su due operazioni). Naturalmente ogni nuova MSN è in grado di fare una e una sola serie di operazioni e gli alunni devono individuarla. Per esempio in questa MSN: la prima volta entra 1 ed esce 5, la seconda entra 2 ed esce 9, poi entra 3 ed esce 13 e così via:



L'esperienza nelle classi mostra come inizialmente sia conveniente adottare un atteggiamento *procedurale* favorendo l'osservazione di 'cosa fa la MSN', se 'esegue una o più operazioni'. Il punto di vista *relazionale* emergerà nel corso dell'attività e diventerà dominante per tutte le fasi successive.

7. Prima esperienza

L'insegnante mostra le sei scatole e chiede di:

A. contare mentalmente le biglie ribadendo che non si deve trovare il loro numero ma spiegare il modo in cui esso è stato calcolato;

B. rappresentare in linguaggio matematico i calcoli esattamente come sono stati effettuati.

Compaiono scritture che vanno poste in discussione. L'insegnante favorirà l'individuazione di quelle - anche non corrette, come nel caso (b) riportato sotto - riconducibili alle due famiglie di rappresentazioni 6×(7+12) e 6×7+6×12.

Riportiamo alcuni esempi tratti da un diario di una quinta primaria.

- *Riconducibili alla rappresentazione 6×(7+12):*
  (a) vengono svolte due operazioni staccate: 7+12=19 → 19×6=114;
  (b) viene calcolato a mente il risultato di 7+12 → 6×19=114.
- *Riconducibili alla rappresentazione 6×7+6×12:*
  (c) vengono svolte due operazioni staccate: 6×7=42 → 6×12=72 → 42+72=114;
  (d) viene sviluppata un'unica espressione iniziale: (6×7)+(6×12)=42+72=114.

Come si può notare, spesso gli alunni sentono ancora il bisogno di trovare una sicurezza attraverso l'individuazione di un risultato.

Seconda esperienza: l'insegnante, attraverso il confronto tra le rappresentazioni precedenti guida la classe a individuare le due rappresentazioni-tipo costitutive della proprietà.

I processi di calcolo proposti nel corso della prima esperienza presentano forme compiute e comunicabili, anche diversissime fra loro. Vanno interpretati e confrontati, allo scopo di capire che sono parafrasi riconducibili a due famiglie che esprimono in linguaggio matematico le due diverse percezioni iniziali; per esempio:

$$6\times(12+7) \text{ e } 6\times12+6\times7$$

Si tratta, nel primo caso, del prodotto tra una somma e un numero, nel secondo della somma tra due prodotti.

7. Seconda esperienza

L'insegnante chiede di esprimere in linguaggio matematico, in due sole forme, le due famiglie di rappresentazioni scritte alla LIM durante la prima esperienza.

Come indicazione di lavoro per il lettore riportiamo la sintesi, tratta da un diario di una quinta, di un'attività simile a quella proposta in questa esperienza, in cui vengono elencate (a sinistra) alcune proposte degli alunni e (a destra) le due rappresentazioni-tipo (A) e (B) emerse durante la discussione collettiva:

(a) 7×6 6×12 72+42 (b) 72+42 (c) 6×12+6×7	}	(A) 12×6+7×6
(d) 19×6 (e) 12+7×6 (f) (12+7)×6 (g) 7+12×6	}	(B) (12+7)×6

Nello stesso diario, l'insegnante guida poi la classe verso l'elaborazione collettiva di argomentazioni che esprimono (come farebbe Maraki) le strategie degli alunni:

"Il gruppo (A) trova il numero delle biglie rosse e quello delle biglie blu e poi somma i due numeri".

"Il gruppo (B) trova il numero delle biglie rosse e quello delle biglie blu di una scatola e poi lo moltiplica per il numero delle scatole".

Si potrebbe giungere anche alla costruzione di una definizione relazionale (come farebbe Pippo):

"(A) è una somma fra due prodotti e (B) il prodotto fra una somma e un numero".

Terza esperienza: gli alunni conquistano l'equivalenza fra le due rappresentazioni.

Questa fase è molto importante perché prepara le conoscenze di base che condurranno alla comprensione della proprietà: le due famiglie di rappresentazioni individuate nella seconda fase esprimono processi sì diversi, ma equivalenti. Alla comprensione dell'equivalenza tra le due rappresentazioni differenti di solito gli alunni arrivano attraverso il calcolo. Una volta verificato che entrambe sono forme non canoniche di uno stesso numero, capiscono che esse sono legate da una relazione esprimibile con il segno di uguaglianza:

$$(12+7)\times 6=12\times 6+7\times 6$$

A. m=f+3 (m = numero dei maschi, f = numero delle femmine)
B. b=5×n (b = numero delle perle bianche, n = numero delle perle nere)
C. o=a (o = numero di scatolette di tonno in offerta, a = numero di scatolette acquistate)
D. r=p:3 (r = numero delle t-shirt rosse, p = numero delle t-shirt prodotte)

20. I BISONTI

Scrivete prima in linguaggio naturale e poi in linguaggio matematico la regola per esprimere:
A. Il numero delle zampe dei bisonti in un branco;
B. il numero delle orecchie dei bisonti in un branco;
C. il numero delle code dei bisonti in un branco.

A. Un'insegnante potrebbe pensare che una rappresentazione come:

b×4

sia sufficiente come risposta alla consegna. In realtà è incompleta, perché esprime solo una parte della 'regola', e cioè:

'prodotto fra il numero dei bisonti e il numero delle zampe di un bisonte'.

È l'accorgersi (il noticing di John Mason) di questa incompletezza che porta a capire che la regola (soggetto-copula-nome del predicato) deve contenere anche ciò a cui si riferisce questo prodotto:

(a) 'Il numero delle zampe dei bisonti è
il prodotto fra il numero dei bisonti e il numero delle zampe di un bisonte'

z=bx4

oppure, a un livello linguistico e matematico più evoluto:

(b) 'Il numero delle zampe dei bisonti è
il quadruplo del numero dei bisonti.'

La frase completa in linguaggio matematico è quindi:

z=4×b

La frase completa è una funzione, che esprime una relazione fra due variabili. La variabile dipendente può essere vista come soggetto della frase e la variabile indipendente come predicato nominale. Il punto di vista linguistico aiuta a capire l'importanza del soggetto.

Riteniamo importante, riferendoci al precedente problema sui bisonti, aggiungere un approfondimento di carattere generale relativamente alla traduzione in linguaggio matematico di una frase che comporta una forma moltiplicativa.

Distinguiamo due punti di vista, uno legato alla produzione di una traduzione espressa in linguaggio naturale, l'altro legato all'interpretazione di una frase espressa in linguaggio matematico:

A. Il numero totale delle uova (u) è il prodotto fra il numero dei contenitori (c) e il numero di posti di un contenitore;
oppure: Il numero totale delle uova è il sestuplo del numero dei contenitori:

$$u=c\times 6.$$

B. Il numero dei contenitori è il quoziente fra il numero totale delle uova e il numero di posti di un contenitore;
oppure: Il numero dei contenitori è un sesto del numero totale delle uova:

$$c=u:6$$

C. Il perimetro di un quadrato (p) è il quadruplo della lunghezza del suo lato (l):

$$p=4\times l.$$

D. La lunghezza del lato di un quadrato è il quoziente fra il perimetro e il numero dei suoi lati;
oppure: La lunghezza del lato di un quadrato è un quarto del perimetro:

$$l=p:4$$

25. L'ETÀ DI ELISABETTA

A. Rappresentate per Brioshi l'età di Elisabetta sapendo che lei ha sei anni in meno del doppio dell'età di suo fratello Marco.
B. Come cambia la vostra rappresentazione se si sa che Marco ha 5 anni?
C. Ora potete trovare l'età di Elisabetta.
D. Verificate la correttezza del valore che avete trovato per il numero sconosciuto sostituendolo nella frase B.
E. Quale età minima può avere Marco?

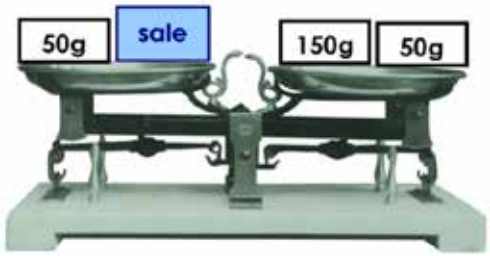
e = età di Elisabetta
m = età di Marco
A. $e=2\times m-6$
B. $e=2\times 5-6$
C. $e=4$.
D. (si sostituisce in A.) $4=2\times 5-6 \rightarrow 4=10-6 \rightarrow 4=4$.
E. Gli alunni possono giungere alla risposta variando in modo ordinato in $e=2\times m-6$ il valore di m:
se m=1 → $e=2\times 1-6$ Non è possibile
se m=2 → $e=2\times 2-6$ Non è possibile
se m=3 → $e=2\times 3-6$ Non è possibile (a meno che Elisabetta non sia una neonata)
se m=4 → $e=2\times 4-6=8-6=2$ Il fratello può avere un'età minima di 4 anni.
Si metterà in evidenza il fatto che l'equivalenza è una funzione, con 'm' variabile indipendente e 'e' variabile dipendente: bisogna conoscere l'età del fratello per trovare l'età di Elisabetta.

A. "Sul piatto di sinistra c'è una scatola di farina e su quello di destra un peso di 200 g".
B. La situazione sembra talmente ovvia che gli alunni appaiono probabilmente disorientati. L'insegnante li guiderà a capire che si può affermare che la farina pesa 200 g solo per il principio fondamentale della bilancia. Quindi l'argomentazione (costruita anche collettivamente ma formulata alla fine, come d'abitudine, da un solo alunno) potrebbe essere organizzata in questo modo:

(1) Poiché la bilancia è in equilibrio,
(2) per il principio fondamentale i pesi sono uguali.
(3) Si può affermare quindi che il sacchetto di farina pesa 200 grammi.

Nelle prossime situazioni aumenta il numero degli oggetti sui piatti e, come si vedrà, sono necessari più passaggi per giungere all'individuazione del valore del peso sconosciuto. Gli alunni capiranno con l'esperienza che, per scoprirlo, occorre fare in modo di *isolare quel peso sul piatto su cui si trova* e lasciare sull'altro pesi noti. In pratica, bisogna giungere ogni volta a riprodurre la configurazione della Situazione 2. Le azioni che permettono di raggiungere questa conclusione rappresentano ciò che in algebra si definisce proprio *isolare l'incognita*.

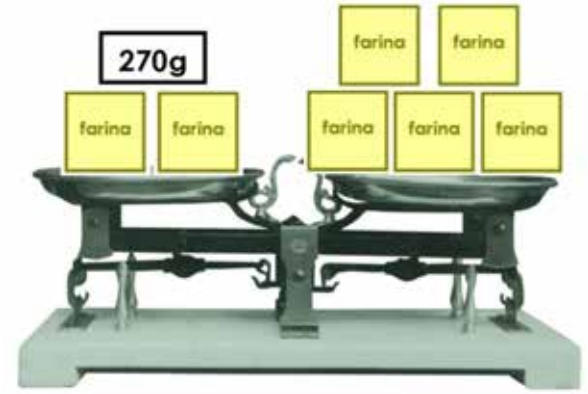
3. L'insegnante costruisce sui due piatti questa situazione:



Poi dà le consegne:
A. Descrivete la situazione.
B. Spiegate come fareste a trovare il peso della scatola di sale.
Datemi degli ordini su cosa intendete fare con i pesi e io li eseguo. Ricordatevi che la bilancia deve sempre rimanere in equilibrio.

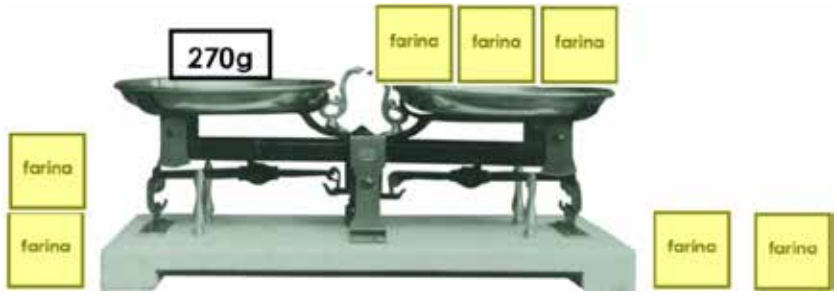
A. "Sul piatto di sinistra c'è una scatola di sale e un peso di 50 g; su quello di destra un peso di 150 g e un altro di 50 g".
*B. Gli alunni dovrebbero riconoscere (o vanno guidati a riconoscere) che questa bilancia è 'risolvibile' applicando il 'principio dello zìtolo-zòtolo' (z-z). Questo consente di togliere il peso da 50 g da entrambi i piatti e di ottenere una disposizione dei pesi identica a quella della situazione **2.**:*

8. L'insegnante presenta questa bilancia:



A. Descrivete la situazione.
B. Spiegate come fareste a trovare il peso di un pacco di farina.
Ricordatevi che la bilancia deve sempre rimanere in equilibrio.

A. "Sul piatto di sinistra ci sono due pacchi di farina e un peso di 270 grammi, su quello di destra cinque pacchi di farina uguali al primo".
B. Alla fine della riflessione collettiva l'argomentazione viene espressa da un solo alunno; ad esempio:
"Per trovare il peso di un pacco di farina applico il primo principio della bilancia e tolgo da entrambi i piatti due pacchi di farina:



Poi applico il secondo principio: siccome sul piatto di destra ci sono tre pacchi, divido per 3 il contenuto di entrambi i piatti e trovo che una scatola di farina pesa 90 g."

esplorate nella Fase 2 per individuare i pesi sconosciuti; si inizia esprimendo in linguaggio matematico:
(i) la situazione di partenza;
(ii) le azioni eseguite, i principi applicati e le relative conseguenze;
(iii) la conclusione (l'individuazione del valore dell'incognita).
Va adottata la convenzione che, ogni volta che si opera una sostituzione o si applica un principio, si descrive ciò che si è fatto e la frase matematica modificata va ricopiata. Questa è una garanzia che gli alunni non eseguano dei trattamenti delle scritture senza il controllo sui significati delle loro scelte.
L'insegnante puntualizza il fatto che mentre quando si risolve un problema si risolve solo *quel* problema, quando lo si rappresenta, si modellizza una situazione problematica, cioè l'equazione che si ottiene rappresenta una classe di infiniti problemi strutturalmente analoghi; ad esempio:

$$11+a=18$$

rappresenta situazioni molto diverse:

- La somma fra l'età del fratello (11) e quella della sorella (a) è uguale a 18 anni.
- In un gruppo la somma fra il numero delle femmine (11) e quello dei maschi (a) è uguale a 18.
- 11 arance sono in frigorifero, le altre (a) sono nella fruttiera, in tutto i frutti sono 18.
- ...

Prima di concludere questa premessa poniamo in evidenza due aspetti molto importanti dell'attività.
Il primo si ricollega a una dualità che nel Progetto ArAl prende il nome di *semantica della situazione - semantica della matematica*; analizziamola in tre momenti successivi:

1) interpretando il testo, e individuando gli *enti* (noti e sconosciuti) e le *relazioni* che li collegano, gli alunni operano all'interno della *semantica della situazione*: enti e relazioni si riferiscono a numeri (di persone, animali, oggetti, ...) o a misure (centimetri, litri, chilogrammi, ...). Sulla base di queste informazioni organizzano la *rappresentazione* in linguaggio matematico della situazione proposta (in questa fase si possono anche negoziare e condividere i termini 'equazione', 'membro', 'incognita'). La classe invia la rappresentazione a Brioshi.
2) Brioshi, nel riceverla, è del tutto ignaro del contesto problematico che l'ha generata e quindi della natura degli enti. La rappresentazione, infatti, è costituita da numeri e non vi compaiono marche. Brioshi è cioè estraneo alla *semantica della situazione*, e opera all'interno della *semantica della matematica.* Interviene con dei *trattamenti formali* sulla scrittura che riceve: a seconda della convenienza, fa riferimento ai due principi della bilancia, sostituisce forme canoniche con forme non canoniche e viceversa, applica proprietà. Detto in altre parole: Brioshi non risolve il problema, risolve l'equazione, e quando individua il valore

b	g	
5	(5-1):2-1	(5-3):2
7	(7-1):2-1	(7-3):2
9	(9-1):2-1	(9-3):2
11	(11-1):2-1	(11-3):2
13	(13-1):2-1	(13-3):2
...	...	...
49	(49-1):2-1	(49-3):2
...	...	...
b	(b-1):2-1	(b-3):2

Si rappresentano in linguaggio matematico le due leggi di corrispondenza:

(a) g=(b-1):2-1 e (b) g=(b-3):2.

Diamo una possibile traduzione della (b), più 'semplice', nel caso che l'insegnante decidesse di farla costruire ad alcuni alunni come incarico 'alto':

"Il numero di una casa gialla è
la metà della differenza fra il numero del dirimpettaio blu e 3."

Spesso, di fronte a più rappresentazioni, gli alunni ritengono di aver trovato 'tante' leggi diverse. L'insegnante li guiderà a capire che sono tutte rappresentazioni formalmente differenti della stessa legge di corrispondenza. Ricollocandosi all'interno della semantica della matematica si può dimostrare che esse sono equivalenti: si può concludere che fra due variabili esiste una sola legge.

20. L'insegnante propone questa MSN:

1	MSN →	2
2		7
3		12
4		17
5		22
16		27

A. Trovate il numero in uscita che corrisponde al numero in entrata 93.
B. Rappresentate una legge generale che esprima il numero in uscita corrispondente a un qualsiasi numero in entrata.

A. Dopo vari tentativi andati a vuoto in quanto validi solo in un caso (riportiamo un esempio nella terza colonna) gli alunni individuano le relazioni corrette che collegano il numero in uscita al numero in entrata (quarta colonna) e scrivono quindi la rappresentazione non canonica del numero in uscita corrispondente a 93, cioè 93×5-3, e infine la sua forma canonica 462:

e	u		
1	2		1×5-3
2	7	2×3+1	2×5-3
3	12	3×3+3	3×5-3
4	17	4×4+1	4×5-3
5	22	5×4+2	5×5-3
...	...		...
93	462		93×5-3
...	...		...
e			e×5-3

B. Ricavano la legge generale:

$$u=e\times5-3$$

L'insegnante può chiedere di verbalizzarla in forma relazionale:

"Il numero in uscita è uguale alla differenza tra il prodotto del numero in entrata con 5 e 3"

oppure:

"Il numero in uscita è uguale alla differenza tra il quintuplo del numero in entrata e 3".

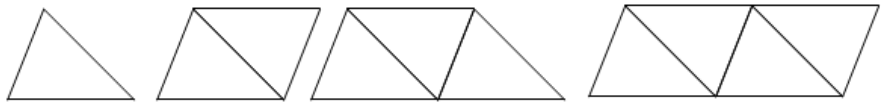
6. Le successioni figurali.

Sono costituite da figure geometriche generate in sequenza da un modello geometrico fissato (pattern). Nei casi più semplici il pattern è un triangolo equilatero, un quadrato, un esagono, ecc. La successione si ottiene per accostamenti progressivi del pattern prima a se stesso poi alle figure che via via si determinano. Nel passaggio da un termine al successivo il numero degli elementi costitutivi delle varie figure - vertici, lati - si accresce in modo regolare.

Si chiede agli alunni di esprimere algebricamente il numero di elementi (stecchini, astine, pallini, ecc) che una generica figura possiede in relazione al posto che occupa nella successione. Quando si contano gli elementi di una figura è molto importante diventare consapevoli dei passaggi fra il modo in cui

- si 'vedono' gli elementi,

21. Moira, incollando fra loro degli stecchini, ha fatto delle costruzioni; usandone sempre di più man mano che le costruzioni si ingrandivano:



1 2 3 4

'Ne voglio fare una lunghissima!' ha pensato 'lunga... come se fosse la venticinquesima! Non so se gli stecchini che ho mi bastano, ci vorrebbe un modo per contarli'. Pensa e ripensa, ma non sa trovarlo. Chissà se voi la sapete aiutare!

A. Descrivete come Moira ha organizzato una dopo l'altra le sue costruzioni.

B. Spiegate come può trovare il numero degli stecchini necessari per realizzare la 25ª costruzione.

C. Esprimete in linguaggio matematico la legge che permette di costruire una figura in una posizione qualsiasi.

A. Gli alunni spiegano a Moira che il conteggio degli stecchini usati nelle costruzioni porta a questi numeri: la prima è formata da 3 stecchini, la seconda da 5, la terza da 7, la quarta da 9. Per realizzare le costruzioni, lei ha cominciato con la prima di tre stecchini e poi ha ottenuto ogni nuova costruzione aggiungendo due stecchini alla precedente.

B. Gli alunni, memori delle situazioni già incontrate (per esempio le case blu con le dirimpettaie gialle) organizzano una tabella. Per individuare le rappresentazioni in linguaggio matematico interpretano le figure di Moira concentrandosi sui numeri delle posizioni delle figure, su quello degli stecchini che le formano e sulle relazioni che collegano tali numeri. Si appoggiano all'osservazione, all'intuizione, al colpo d'occhio. Inseriamo in due riquadri di diverso colore le 'scoperte' di gruppi di alunni di due classi quinte (p = numero della posizione, s = numero degli stecchini):

p	s					
1	3	2×1+1	1×2+1	3+0	3+2×0	3+2×(1-1)
2	5	2×2+1	2×2+1	3+2	3+2×1	3+2×(2-1)
3	7	2×3+1	3×2+1	3+4	3+2×2	3+2×(3-1)
4	9	2×4+1	4×2+1	3+6	3+2×3	3+2×(4-1)
...	...					...
25		2×25+1	25×2+1			3+2×(25-1)

C. Per analogia strutturale con le scritture delle righe precedenti gli alunni completano la tabella:

p	s				
1	3	2×1+1	3+0	3+2×0	3+2×(1-1)
2	5	2×2+1	3+2	3+2×1	3+2×(2-1)
3	7	2×3+1	3+4	3+2×2	3+2×(3-1)
4	9	2×4+1	3+6	3+2×3	3+2×(4-1)
...	...				...
25					3+2×(25-1)
...	...				...
p		2×p+1			3+2×(p-1)

Esprimono la legge che permette di costruire una figura che si trovi in una posizione qualsiasi in tre forme:

(a) s=2×p+1 (b) s=p×2+1 (c) s=3+2×(p-1)

L'insegnante può verificare la competenza nel tradurre la legge in linguaggio naturale; ecco alcune parafrasi prodotte durante attività di classe (dalla quinta primaria alla terza secondaria):

(a) e (b):

"Il numero degli stecchini necessari per costruire una figura è uguale alla somma fra il doppio del numero della sua posizione e 1".

"Il numero degli stecchini necessari per costruire una figura è uguale al successivo del doppio del numero della sua posizione".

(c)

"Il numero degli stecchini necessari per costruire una figura è uguale alla somma fra 3 e il doppio della differenza fra il numero della sua posizione e 1".

"Il numero degli stecchini necessari per costruire una figura è uguale alla somma fra 3 e il doppio del precedente del numero della sua posizione".

competenza linguistica (in senso lato), perché in questo modo si affina anche il controllo dei termini appropriati. È solo con queste premesse, costruite e consolidate attraverso un paziente e costante affinamento del *balbettio algebrico*, che gli studenti sono in grado di interpretare scritture algebriche come quelle presenti in tutte le tabelle di questo capitolo e possono esprimerle in termini relazionali'. (p.313).

13. Argomentate la correttezza di questa equivalenza:

$$96-2\times6\overset{?}{=}96-15$$

Premesse:

- *96-2×6=96-15 sono entrambe differenze*
- *96-2×6=96-15 in entrambe il minuendo è 96*
- *96-2×6=96-15 si confrontano i sottraendi: 2×6 è la forma non canonica di 12*
- *12<15*

Conclusione: 96-2×6>96-15 (qualche alunno potrebbe mostrarsi perplesso dalla conclusione: siccome 12<15, allora 96-2×6>96-15; si rifletterà sul fatto che, a parità di minuendo, la differenza è tanto maggiore quanto minore è il sottraendo).
L'insegnante può anche richiedere la verbalizzazione di questa equivalenza:
"La differenza fra 96 e il doppio di 6 è maggiore della differenza fra 96 e 15".

14. Argomentate la correttezza di questa equivalenza:

$$15\times24\overset{?}{=}45\times8$$

Una possibile argomentazione:
"24 (a sinistra) è il triplo di 8 (a destra) e 45 (a destra) è il triplo di 15 (a sinistra). Rappresento 24 come 3×8 (o 8×3) e 45 come 15×3 (o 3×15):

$$15\times3\times8=3\times15\times8$$

L'equivalenza è vera".
Con un ulteriore passaggio, applicando la proprietà commutativa, si potranno ottenere due rappresentazioni uguali.

15. Argomentate la correttezza di questa equivalenza:

$$300\times40\overset{?}{=}4\times3000$$

Un'argomentazione:
"Sostituisco a destra 3000 con 300×10 e a sinistra 40 con 4×10:

$$300\times4\times10=4\times10\times300$$

Ai due lati dell'uguale ci sono due rappresentazioni uguali e quindi l'equivalenza è vera".
L'insegnante potrebbe dire all'autore che le due rappresentazioni non sono proprio 'uguali' in modo che emerga la proprietà commutativa (non si accontenti di un semplice "I numeri cambiano di posto").

Poi sostituisco la forma non canonica 6 per 4 con la canonica 24 e dimostro l'equivalenza:

$$24\times5=24\times5"$$

Alunno C2: "Ho pensato che 30 e 24 hanno come divisore comune 6 (oppure "sono multipli di 6" o ancora "appartengono alla tabellina del 6") e ho scritto:

$$6\times5\times4\stackrel{?}{=}6\times4\times5$$

Così ho due rappresentazioni equivalenti e ho dimostrato che l'equivalenza è vera".

(D) $30\times4\stackrel{?}{=}10\times12$

Un alunno può vedere 30 in forma non canonica come triplo di 10:

$$3\times10\times4\stackrel{?}{=}10\times12$$

Poi sostituisce alla rappresentazione non canonica 3×4 quella canonica e dimostra l'equivalenza:

$$10\times12=10\times12$$

Oppure sostituisce 12 con 3×4 e ottiene:

$$3\times10\times4=10\times3\times4$$

22. Argomentate la verità di questa equivalenza:

$$60\times48\stackrel{?}{=}6\times480$$

Un'argomentazione orale accompagnata da rappresentazioni in linguaggio matematico:

"Posso rappresentare 60 in forma non canonica come prodotto fra 6 e 10 e 480 come prodotto fra 10 e 48:

$$6\times10\times48=6\times10\times48$$

Una 'dimostrazione' diversa, espressa solo in linguaggio matematico, passa attraverso la trasformazione di un solo membro dell'equivalenza in modo da renderlo formalmente identico all'altro, ad esempio:

$60\times48=6\times480$

$6\times10\times48=6\times480$

$6\times480=6\times480$

23. Argomentate la correttezza di questa equivalenza:

$$6\times84\stackrel{?}{=}42\times10$$

Un'argomentazione orale accompagnata da rappresentazioni in linguaggio matematico:

29. Attribuisci un valore a n in modo che questa equivalenza sia vera:

$$88+2=10\times n$$

Argomentazione procedurale:
"88 più 2 è uguale a 90. Il numero per cui devo moltiplicare 10 per ottenere 90 è 9, quindi n è uguale a 9:

88+2=10×9"

Argomentazione relazionale:
"La somma a sinistra è una forma non canonica di 90. Affinché il prodotto fra 10 e n sia uguale a 90, n deve essere uguale a 9".

30. Attribuisci un valore a p in modo che questa equivalenza sia vera:

$$3\times5-15=74-p$$

Argomentazione procedurale:
"Se moltiplico 3 e 5 e sottraggo 15 ottengo zero. Per avere anche a destra uno zero, a 74 devo sottrarre un numero uguale, quindi p deve essere uguale a 74:

3×5-15=74-74"

Argomentazione relazionale:
"Il prodotto fra 3 e 5 è una forma non canonica di 15, quindi la differenza a sinistra è uguale a zero. Per avere anche a destra una differenza uguale a zero, p deve essere uguale a 74".

31. Attribuisci un valore a m e n in modo che questa equivalenza sia vera:

$$5\times m=3\times n$$

Una possibile argomentazione:
"Il prodotto fra 5 e m deve essere uguale al prodotto fra 3 e n. Perché questo avvenga, bisogna che m sia uguale a un multiplo di 3 e n sia uguale a un multiplo di 5".

32. Attribuisci un valore a c in modo che questa equivalenza sia vera:

$$32+17=15+32+c$$