29 Gennaio 2025

Commenti *Insegnante di classe*
Commenti *Emma Pareti, laureanda*
Commenti *Giancarlo Navarra*

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE: La classe 4ª A è composta da 22 alunni, 13 femmine e 9 maschi. Sono presenti 8 alunni stranieri. La classe è eterogenea, ci sono tre alunni con BES e un gruppo che, più di altri, si mostra partecipativo alle sollecitazioni didattiche. Abbiamo lavorato dalla classe prima con le tematiche ArAl quali la rappresentazione canonica e non canonica di un numero, il significato relazionale del segno uguale (anche attraverso l'uso della bilancia), il numero sconosciuto e alcune sue rappresentazioni, Brioshi e le traduzioni dal linguaggio naturale al linguaggio matematico e viceversa. Abbiamo lavorato con il calcolo mentale e ragionato sin dalla seconda primaria affrontando le proprietà delle operazioni come supporto al calcolo e spendibili nella pratica quotidiana.

PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ: Dopo aver lavorato sia sulle forme canoniche e non canoniche dei numeri, sia sull'uguale relazionale e sulla ricerca e sull'individuazione di uguaglianze tra scritture diverse dello stesso numero, da questo anno abbiamo iniziato ad affrontare l'attività su "confrontare senza calcolare", verificando semplici uguaglianze e soprattutto argomentando le proprie scelte.

1. *L'insegnante scrive alla Lim queste frasi. Individualmente ogni bambino le scrive sul proprio quaderno:* [1]

12×3=12+12+12	30-15=45:3	25:5=250:50	20×2×5=100×2

2. I: Ragazzi, intanto ve li scrivo, voi stabilite la relazione[2], dopo insieme ci confrontiamo su quello che avete stabilito. È chiaro?[3]
3. Alunni: Sì, sì.
4. I: Accanto scrivete se l'uguaglianza è vera o falsa... io vi faccio il quadratino, ma anche senza il quadratino, va bene... faccio il rettangolino, perché il quadratino è troppo grande! Partiamo con queste, confrontiamoci e poi proseguiamo con il resto del lavoro. Ricordatevi che dobbiamo spiegare e argomentare la nostra scelta, questo è fondamentale, quindi non partiamo subito con VERO/FALSO senza avere chiaro in testa il perché.[4]
5. Ajla: Perché noi non possiamo dire a caso, deve avere un senso, perché non possiamo dire che 12+12+12 è 36 senza capire perché.[5]
6. *Tempo di lavoro...*

---

[1] *L'attività è stata impostata come lavoro individuale in maniera tale che ognuno possa riflettere sulle proprie scelte e possa spiegare tale scelta. Nell'altra quarta la stessa attività è stata affrontata come lavoro in piccoli gruppi, questo ha facilitato la comprensione, lo svolgimento e la partecipazione all'attività anche dei bambini più fragili. Credo che, al fine di promuovere la riflessione sia individuale sia collettiva su ognuna delle uguaglianze proposte, sarebbe stato più utile scrivere e chiedere di analizzare un'uguaglianza alla volta: l'analisi di ciascuna di esse infatti può rappresentare un'occasione di confronto e dialogo tra gli studenti e presentarle tutte assieme, a mio giudizio, non favorisce la focalizzazione su ogni singola uguaglianza.*

[2] *Credo si sarebbe potuta trovare una richiesta più efficace al fine di chiarire l'obiettivo dell'attività. A mio giudizio, "stabilite la relazione" è una richiesta ambigua, tanto più se non viene specificato la relazione tra cosa: per come è stata formulata, si potrebbe anche star chiedendo di stabilire la relazione tra i numeri appartenenti a un singolo membro dell'uguaglianza (relazione moltiplicativa per il membro di sinistra e relazione additiva per il membro di destra). Dato che mi immagino si volesse chiedere di stabilire la verità delle uguaglianze, suggerisco di chiederlo esplicitamente: "Verificate la verità delle seguenti uguaglianze".*

[3] *Per tutti è chiaro. Ritengo che la 'chiarezza' di una richiesta non possa essere verificata da una domanda come "È chiaro?". Dato che si tratta di un'attività con potenziali implicazioni matematiche di livello anche molto alto per gli alunni, avrei suggerito di ripassare velocemente cosa significa Confrontare senza Calcolare.*

[4] *Spesso noto una certa ridondanza nelle mie spiegazioni e a causa di queste ho l'impressione si creino dubbi nei ragazzi.*
Aggiungo questo commento dopo aver letto tutto il diario. Comprendo le intenzioni dell'insegnante di tendere alla chiarezza nelle sue spiegazioni ma in effetti sì, in certe situazioni (4, 98, 106, 109) tende a 'dire troppo'.
Non mi sembra questo il caso, anzi credo che ricordare al gruppo classe la necessità di spiegare e argomentare le proprie scelte sia sempre utile.

[5] *Ben detto!*

7. I: Ci siamo? Tutti possiamo iniziare a confrontarci?
8. Alunni: Sì.
9. I: Vai Leo, inizia tu...
10. Leo: 12×3=12+12+12 è VERA, perché 12×3 ho moltiplicato 12 per 3 volte e anche 12+12+12 è come fare 12×3.[6] [7]
11. Ettore: Perché il 12 è ripetuto tre volte.
12. I: Ok, perfetto! Mi sembra chiara la spiegazione...[8] C'è chi vuole spiegarlo in un altro modo?[9]
13. Ajla: Perché 12×3 fa vedere il triplo e anche 12+12+12 anche questo fa vedere il triplo di 12 perché lo ripete 3 volte.
14. I: Il concetto che ha detto Ajla è giusto, c'è una piccola particolarità che non suona proprio bene... qualcuno l'ha colta? [10]

---

[6] *L'intervento di Leo ("ho moltiplicato 12 per 3", "12+12+12 è come fare 12 per 3") è* procedurale. *Di fatto, la fisionomia generale della discussione così come si evince dal diario rimane procedurale sino all'intervento di Simone (97) che, per la prima volta, usa i termini 'forma canonica' e 'forma non canonica' introducendo un punto di vista* relazionale*, che per altro non influenza altri compagni, perché ricompare solo in Elena (114), Domenico (122) e Gaia (124). L'insegnante (12) non nota gli aspetti procedurali dell'intervento di Leo (10), confermando quello che il ricercatore inglese John Mason scrive:*

> *'«Ogni professionista, indipendentemente dall'ambito in cui opera, desidera saper cogliere le possibilità, essere sensibile alle situazioni e rispondere in modo appropriato. Ma ciò che si considera appropriato dipende da ciò a cui si attribuisce valore, che dipende sua volta da ciò che si è capaci di notare. [...] [Nel caso dell'insegnante] notare ciò che gli alunni fanno o come rispondono, valutare ciò che dicono anche contro le proprie aspettative e i propri criteri di valutazione e considerare ciò che potrebbe essere detto o fatto in seguito. È sin troppo ovvio dire che non si può intervenire su ciò che non si nota; non si può scegliere di fare qualcosa se non si ravvisa l'opportunità di farlo» (Mason J. (2002).* Researching Your Own Practice*. The Discipline of Noticing. Rotledge Falmer. London and New York., p. 71)'.*

[7] *Ci sono almeno due osservazioni che vorrei fare rispetto a questo intervento:*

- *dato che si tratta di una trascrizione, è importante che in un Diario siano riportate esattamente le parole pronunciate dagli alunni. Le scritture in linguaggio matematico infatti non permettono di capire cosa abbiano detto i bambini: nel caso di 12×3, per esempio, cosa ha detto esattamente Leo? "Dodici per tre", "Il prodotto di dodici per tre", "Il prodotto di dodici e tre"? Ognuna di tali traduzioni in linguaggio naturale suggerisce una visione diversa della situazione da parte dell'alunno, visione che non è possibile ricostruire dalla trascrizione in linguaggio matematico;*
- *tutto l'intervento suggerisce un retropensiero* procedurale *da parte dell'alunno. La frase "12×3 (che, a questo punto, immagino sia stato tradotto come "Dodici per tre" e non come "Il prodotto di dodici e tre") ho moltiplicato 12 per 3 volte" e anche la frase "12+12+12 è come fare 12×3" rimandando entrambe al 'fare', al 'calcolare'. Una visione* relazionale *dell'uguaglianza avrebbe potenzialmente prodotto una frase del tipo: "Il prodotto di dodici e tre è uguale alla somma tra dodici, dodici e dodici poiché entrambi sono rappresentazioni non canoniche dello stesso numero". Una spiegazione del genere non sarebbe però stata del tutto coerente con la richiesta di CsC: per mostrare che l'uguaglianza è verificata, si sarebbe dovuto ricondurre i due membri alla stessa forma, per esempio rappresentando 12×3 come 12+12+12. Aggiungo un commento generale all'osservazione della laureanda: il confronto tra i due membri dell'equivalenza va fatto naturalmente sull'uguaglianza originale (in questo caso 12×3=12+12+12) mettendo in evidenza, come lei scrive, le rappresentazioni additiva e moltiplicativa dello stesso numero. L'insegnante, a seconda dell'età degli alunni, può decidere poi se e come guidare la classe verso quella che nel Progetto ArAl conveniamo di chiamare 'dimostrazione', riconducendo alla stessa forma i membri, attraverso semplici trattamenti a sinistra o a destra dell'uguale. Concludo quindi dicendo che l'argomentazione ipotizzata ("Il prodotto di dodici e tre è uguale alla somma tra dodici, dodici e dodici poiché entrambi… ") è pienamente coerente con la consegna.*

[8] *Effettivamente, l'alunno ha spiegato bene il proprio pensiero, ma, come detto in Com-7, la sua risposta anzitutto non sembra esprimere un approccio relazionale all'attività proposta – e l'obiettivo ultimo di attività di CsC è proprio promuovere lo sviluppo del pensiero relazionale – inoltre non rende evidente la verità dell'uguaglianza tra i due membri. Si poteva proporre all'alunno (o a Leo o ad Ettore) di venire alla lavagna e di esplicitare il proprio ragionamento tramite opportuni passaggi logico-matematici.*

[9] *Ottima richiesta: far riformulare o ampliare da qualcun altro quanto appena affermato da un compagno è sempre utile sia per favorire l'argomentazione sia in un'ottica di costruzione sociale della conoscenza.*

[10] *L'osservazione dell'insegnante è molto importante, e stimola la bella risposta di Ajla (13). Mi succede molte volte di pensare che, in fondo, anche per gli insegnanti valga la metafora del* balbettio algebrico*. Mentre in (12) l'insegnante non coglie l'aspetto procedurale dell'intervento di Leo (10), qui invece invita ad una riflessione sul significato delle parole di Ajla - "12×3 fa vedere il triplo" -, riprese da Rita (15), guidando così gli alunni verso una concezione* relazionale *di '12×3', che viene espressa chiaramente da Rita (17: "è il triplo"). In base alla nostra esperienza, questa 'convivenza di punti di vista' anche negli insegnanti si chiarisce tanto più quanto più essi lavorano in modo*

15. Rita: Ha detto che 12×3 fa vedere il triplo.
16. I: 12×3 fa vedere il triplo?
17. Rita: NO, è il triplo.
18. I: Brava Ajla abbiamo colto il triplo, però 12×3 lo fa vedere o è il triplo?
19. Ajla: È il triplo.
20. I: Allora 12×3 è il triplo di 12 e… continua Ajla...
21. Ajla: ...e quindi 12+12+12 è lo stesso il triplo di 12.
22. I: Vi torna? Ok![11] Ettore?
23. Ettore: Volevo dire la stessa cosa che quando fai 12×3[12], il 12 lo ripeti per 3 volte e 12+12+12 è il 12 ripetuto per 3 volte.
24. I: Andiamo alla seconda.[13] Chi vuole spiegare? Ha alzato la mano Alemin.
25. Alemin: 30-15=45:3 è FALSA.
26. I: È falsa, dice Alemin. Perché?
27. Alemin: Perché 30-15 fa 25 e 45:3 fa 11, ma c'è il resto di 2.[14] [15]
28. I: Quello che afferma Alemin vi torna?
29. Alunni: No.
30. I: Alza la mano chi vuole spiegare ad Alemin perché quello che afferma non torna.[16]
31. Matilde: Perché 30-15 facciamo la metà di 30 che è 15 e 45:3 è sempre 15.
32. Ettore: È VERA perché 45:3 fai 3×10 che è 30, poi aggiungi 15.
33. I: Così hai calcolato, Matilde stava dicendo un'altra cosa. Matilde ha detto che 30-15 è la metà di 30 quindi è 15, 45:3 è... ed è rimasta in sospeso questa "è"... che cos'è?
34. Ettore: È 15!
35. I: È 15 ok! Ma che cos'è? 45:3 che cos'è?
36. Elena: 15 è la terza parte di 45 quindi è vera!

---

continuativo su questi concetti e affinano di conseguenza la loro sensibilità, intervenendo, per dirla con Mason, 'su ciò che imparano a notare'.

[11] Anche in questo caso, come già commentato in Com-9, credo che evidenziare e chiedere di argomentare la differenza concettuale tra "fa vedere" ed "è" sia stata una valida richiesta per gli alunni: favorisce l'acquisizione dei concetti matematici in gioco e di conseguenza permette di raffinare le argomentazioni. Pertanto, quando si presenta l'occasione, suggerisco di porre sempre quesiti a cavallo tra concetti matematici e linguistici agli alunni: ne beneficeranno sia le loro competenze matematiche sia le loro competenze linguistiche.

[12] Anche per quanto riguarda Ettore, ribadisco quanto affermato in Com-7. Aggiungo solo che, data la 'deriva procedurale' che sta prendendo l'andamento dell'attività, avrei suggerito di interrompere momentaneamente il lavoro per rivedere assieme al gruppo classe cosa significa CsC, evidenziando agli alunni il carattere procedurale delle loro affermazioni, come di "quando fai 12×3".

[13] L'attività si è conclusa scrivendo 'V' di 'vera' accanto all'uguaglianza. Credo sarebbe stato più chiaro ed interessante esplicitare le argomentazioni degli alunni mostrando i passaggi logico-matematici relativi alle loro argomentazioni, come commentato nel Com-8: di nuovo, si poteva chiamare qualcuno alla lavagna oppure farsi dettare ciò che avrebbe dovuto scrivere. In questo modo si sarebbero ottenuti almeno due vantaggi: gli alunni sarebbero stati spronati a dare una forma al proprio pensiero e sarebbero state promosse eventuali altre riflessioni in merito all'uguaglianza in oggetto.

[14] Al di là degli errori nei calcoli emerge chiaramente il punto di vista procedurale *di Alemin ("30-15 fa 25" e "45:3 fa 11"). Anche le successive spiegazioni di Matilde (31) ed Ettore (32) riflettono il medesimo punto di vista ("facciamo la metà" e "fai 3 per 1… poi aggiungi 15").*

[15] Dall'intervento di Alemin risulta evidente che gli alunni non stanno confrontando i due membri dell'uguaglianza, stanno eseguendo dei calcoli (qui errati, ma non è questo il punto): si sta perdendo il senso dell'attività. D'altra parte, mi chiedo come avrebbero potuto confrontare i due membri di questa uguaglianza senza ricorrere al calcolo: non riesco ad individuare nessuna strategia che permetta di rendere confrontabile la differenza al primo membro con il quoziente al secondo membro. Ricordo infatti che non è sufficiente che gli alunni diano come unica spiegazione della verità di un'uguaglianza "sono entrambe forme non canoniche di 15", dato che anche un'affermazione del genere potrebbe derivare da un calcolo. Per poter procedere con il confronto, i membri dell'uguaglianza devono essere ricondotti a rappresentazioni non canoniche quanto più simili possibile, dello stesso numero o di numeri diversi (a seconda che l'uguaglianza sia vera o meno). Invito a cimentarsi sempre nelle attività proposte, in modo da evitare di proporre situazioni incompatibili con l'obiettivo che intende perseguire.

[16] Secondo me sarebbe stato meglio prestare attenzione al fatto che gli alunni notassero che l'intervento di Alemin "non torna" non tanto perché ha sbagliato a calcolare, quanto perché non è coerente con gli obiettivi dell'attività; invece tutto l'episodio (30-45) è volto a riflettere proprio sui calcoli. L'accenno alla necessità di riflettere sulle relazioni (41-42) mi sembra davvero troppo veloce per essere significativo.

37. I: Qual è stato l'errore di Alemin, secondo voi?[17]
38. Ettore: Nel fare il calcolo 30-15.
39. I: Alemin ha sbagliato nei calcoli, ma cosa non ha visto?
40. Domenico: Non ha visto l'uguaglianza.
41. I: Però prima di vedere l'uguaglianza cosa dobbiamo capire?
42. Alunni: La relazione.[18]
43. I: Ok. Andiamo alla prossima.
44. Alunni: Ovviamente si può sbagliare un calcolo...
45. I: Certo, mica non vogliamo più Alemin in classe perché ha sbagliato un calcolo! Però lo aiutiamo a capire dove era l'errore, che non è solo suo, quindi correggano anche tutti gli altri. Simone, vai alla prossima.
46. Simone: 25:5=250:50 è VERA, perché 25:5 è 5 e la quinta parte di 250 è 50.[19]
47. I: In questo modo non mi sembra sia vera.[20]
48. Ettore: Tra 25:5 e 250:50 è solo per 10 quindi non cambia il numero, è solo che c'è la proprietà…
49. Elena: C'è applicata la proprietà invariantiva.[21]
50. I: Elena puoi spiegarci cosa intendi?
51. Elena: C'è la proprietà invariantiva perché 250:10 è 25 e 50:10 è 5.
52. I: Quindi sono uguali perché?
53. Elena: C'è applicata la proprietà invariantiva.
54. I: Ok! Brava Elena. Facciamo[22] l'ultima, vai Mattia.
55. Mattia: Allora:

$$20\times2\times5=100\times2$$

è VERA perché 20×2 è 40 poi per 5 è 200 poi...

56. I: Ma perché è vera? Hai fatto un calcolo ma se non dovessimo calcolare?

---

[17] *Spesso do la parola a più bambini e forse sarebbe meglio invece che ognuno venisse spronato o aiutato a finire la formulazione del suo pensiero prima di passare ad un altro bambino.*
Concordo. La discussione può benissimo essere collettiva, però ogni alunno dovrebbe sapere che deve assumersi la responsabilità di formulare chiaramente, e in modo autonomo, un'argomentazione conclusiva in cui fonde gli interventi suoi e dei compagni.
Credo dipenda molto dal contesto: in un'ottica di costruzione sociale della conoscenza, il fatto che prendano parola diversi alunni durante la conversazione può essere positivo se l'insegnante sa gestire i vari interventi, se riesce quindi a tenere il filo della conversazione seppur cercando di intervenire il meno possibile; d'altra parte, al fine di promuovere le capacità argomentative di ciascun alunno, è senz'altro utile spronare o aiutare un alunno a riformulare o ampliare il proprio pensiero. Non credo dunque che vi sia una condotta che vada sempre bene, come d'altronde non c'è quasi mai in ambiente didattico.

[18] *Mi sembra che la domanda (41) dell'insegnante sia troppo generica anche se capisco, da quello che dicono gli alunni (42), che la risposta rientra in una sorta di 'lessico familiare' per cui essi sanno quale sia quella attesa. Faccio però notare come una risposta come 'La relazione" sia decisamente troppo povera. È importante negoziare, ogni qual volta se ne presenti l'occasione, le ragioni per le quali sono così importanti il saper verbalizzare e il saper argomentare. Si possono stimolare pur brevi riflessioni collettive attorno a domande del tipo "Secondo voi perché vi chiedo di costruire delle argomentazioni il più possibile chiare e complete?".*

[19] *L'argomentazione di Simone è corretta. Però mi chiedo se lui davvero veda 25:5 e 250:50 come quozienti rappresentativi dello stesso numero 5. Dico questo perché ho l'impressione che, nel dire "25:5 è 5", usi sì il verbo 'essere' ma in realtà veda 25:5 come divisione e 5 come risultato; in modo analogo, che interpreti '5' non come forma canonica di '250:50' ma come, appunto, la 'quinta parte', cioè che veda* concretamente *la relazione fra i due numeri. Se la mia ipotesi fosse corretta, il retro-pensiero di Simone sarebbe* procedurale.

[20] *Seppur non si sottolinei il fatto che l'alunno ha adottato una prospettiva procedurale, ritengo che questa osservazione sia efficace al fine di far riflettere Simone sui calcoli eseguiti: non dà suggerimenti all'alunno, si limita a fargli notare che quanto ha affermato (46) non è sufficiente per determinare la verità dell'uguaglianza; l'alunno potrebbe così essere spronato a riflettere autonomamente sul perché la sua spiegazione non è sufficiente e potenzialmente essere quindi invogliato ad ampliare la propria riflessione.*

[21] *Vorrei far notare che il successivo episodio (49-53) si apre e si chiude con la stessa frase, il che suggerisce che non vi sia stato un vero ragionamento da parte dell'alunna. Elena infatti non ha davvero mostrato il ruolo della proprietà invariantiva nel determinare la verità dell'uguaglianza e neppure ha spiegato in cosa consista tale proprietà. Faccio notare che l'alunna sarebbe stata probabilmente favorita nella propria spiegazione se le fosse stato suggerito di scrivere alla lavagna i passaggi logico-matematici che permettono di 'vedere' la proprietà invariantiva.*

[22] *Trovo che questa indicazione strida con l'obiettivo dell'attività, in quanto potrebbe essere avvertita come un rimando al* fare *nel senso di* calcolare. *Forse sarebbe stato meglio utilizzare verbi come confrontare, analizzare, riflettere, commentare, più in linea con quanto atteso da attività di CsC.*

57. Elena: È vera perché c'è applicata la proprietà associativa.
58. I: Spiegati meglio Elena.
59. Elena: Perché 20×5 è uguale a 100 e per 2 è 200.[23] [24]
60. I: Quanti di voi sono riusciti a vedere l'uguaglianza attraverso la proprietà associativa?
61. Ajla: Io ho fatto così: ho moltiplicato 2×5 e poi ho moltiplicato anche per 20.
62. I: Hai calcolato... però, attraverso la proprietà associativa bisogna fare tanti calcoli?[25] Se noi riusciamo a vedere che sostituendo 20×5 a 100 abbiamo la stessa forma, la stessa scrittura, poi moltiplichiamo per 2 abbiamo l'uguaglianza. [26] Adesso cambiamo lavoro e mettetevi un po' in gioco!
63. *Attività scritta alla LIM da riportare nei singoli quaderni:*

> Prova a costruire la relazione tra due uguaglianze utilizzando le strategie che vuoi.[27]

---

[23] *Ritengo che anche Elena esprima un punto di vista* procedurale*; infatti, per 'dimostrare' la verità dell'uguaglianza effettua due calcoli consecutivi. In base alla mia esperienza nelle classi, sarebbe importante promuovere il punto di vista* relazionale *guidando verso un'argomentazione mista, a cavallo fra linguaggio naturale e matematico, per esempio:*

- *"Rappresento a destra 100 nella forma non canonica 20×5: 20×2×5=20×5×2;*
- *per rendere del tutto uguali le scritture alle due parti dell'uguale applico a destra la proprietà commutativa e scrivo: 20×2×5=20×2×5".*

Naturalmente si può operare in modo del tutto simile a sinistra:

- *Rappresento a sinistra 20×5 nella forma canonica 100: 100×2=100×2.*

[24] *Non vi era alcun bisogno di svolgere questo calcolo. Elena ha giustamente notato che in entrambi i membri dell'uguaglianza è presente il numero 100 (in rappresentazione non canonica a sinistra e in rappresentazione canonica a destra) ma poi non ha confrontato i prodotti 100×2 e 100×2 in quanto tali, bensì ha calcolato che entrambi sono uguali a 200. Inoltre all'alunna era stato richiesto di "spiegarsi meglio" (58) ma, anche in questo caso – come evidenziato nel Com-21 – non vi è stata una vera argomentazione quanto un'esplicitazione dei calcoli. Se l'alunna fosse venuta alla lavagna, si sarebbe forse potuto avviare una 'dimostrazione':*

- *giungere ad analizzare l'uguaglianza evidenziando i seguenti passaggi:*
  20×2×5=100×2
- *accorgersi che 20×5 è una RnC di 100 e 100 è RC di 100. Per mostrare la corrispondenza tra i due numeri:*
- *applicare la proprietà commutativa tra 2 e 5:*
  20×5×2=100×2
- *sostituire 100 con la sua RnC 20×5;*
  20×5×2=20×5×2
  i due membri sono entrambi il prodotto di 20, 5 e 2, pertanto l'uguaglianza è vera.

Al contrario, non si è mai 'sporcata' la lavagna, ma ci si è limitati a mettere una V o una F accanto ad ogni uguaglianza, pratica che, a mio giudizio, non sprona gli alunni ad argomentare né ad eseguire confronti: per confrontare infatti è indispensabile appuntarsi i vari passaggi che portano al confronto e anche la giustificazione matematica di tali passaggi (ciò non è invece necessario se si eseguono calcoli, perdipiù a mente).

[25] *Ho l'impressione che gli alunni pensino alle proprietà riferendole solo/prevalentemente ai calcoli, mentre sarebbe importante che le usassero in funzione delle rappresentazioni di un numero, per favorire un passaggio o rendere evidente un'uguaglianza, come negli esempi del mio commento precedente.*

[26] *Mi sono palesemente sostituita a loro suggerendo la risposta. A volte, presa dalla fretta di andare avanti, mi accorgo che hanno capito e non insisto nel pretendere maggiore argomentazione, mi rendo conto solo dopo che avrei dovuto aspettare che arrivassero da soli alla formulazione del pensiero. Che la fretta sia cattiva consigliera è noto, e con attività di CsC, promotrici di riflessione, è difficilmente conciliabile: con più calma, si sarebbero potute esplicitare alla lavagna le strategie di confronto utilizzate dagli alunni, analizzare punti di forza e di debolezza di ogni strategia, modificare le uguaglianze in modo da osservarle da nuovi punti di vista… Il lavoro è però stato impostato come fosse una 'catena di montaggio' votata alla velocità: le uguaglianze vengono mostrate tutte assieme (rimando al Com-1), per dimostrarne la verità si ricorre per lo più a calcoli, le rare riflessioni di carattere relazionale difficilmente vengono approfondite o curate… Sarebbe necessario concedere sia all'attività sia agli alunni più tempo: sono sicura che sarà di beneficio per tutti, non solo per la didattica. Concludo evidenziando che questo intervento suggerisce esso stesso una visione procedurale: "Poi moltiplichiamo per due e abbiamo l'uguaglianza" si consiglia agli alunni di svolgere un calcolo che, come commentato nel Com-24, non è necessario; inoltre, a mio giudizio, l'espressione "abbiamo l'uguaglianza" è ambigua: l'uguaglianza c'è già, si tratta di capire se è vera oppure no.*

[27] *Un compito alto ma che li mette in discussione sulla capacità di ragionare su cosa vuol dire uguaglianza e anche sulle strategie e sulle proprietà delle operazioni.*

Naturalmente dovete spiegare cosa avete utilizzato e perché queste uguaglianze sono vere… Chi non ha capito cosa deve fare? *(Ajla alza la mano)* Ok! Cosa abbiamo fatto prima?

64. Ajla: Abbiamo fatto un vero/falso...[28] Abbiamo confrontato ehm…
65. I: Ok… abbiamo stabilito…
66. Ajla: … e abbiamo stabilito la relazione…
67. I: Se la relazione tra le uguaglianze era vera o falsa. Questa volta non vi do io le uguaglianze, ma le dovete fare voi.[29] Quindi non vi sto dicendo di stabilire se sono vere o false, perché devono essere uguaglianze vere,[30] ma dovete utilizzare, senza calcolare, le strategie che abbiamo già imparato...
68. Ettore: Maestra, quante ne facciamo?
69. I: Cominciamo con tre. Quando si parla di strategie cosa si intende, Hermens? Matilde?
70. Matilde: Cioè che… le proprietà delle operazioni…[31]
71. I: Le proprietà, ma non solo! Ci può essere anche qualche altra strategia come dice Domenico.[32] Non devono per forza essere moltiplicazioni, divisioni ma tutte e quattro le operazioni.[33]
72. Domenico: Ovviamente non solo addizioni e sottrazioni... [34]
73. I: Certo, diciamo che mettiamo in gioco tutte e quattro le operazioni… poi non è detto che dobbiate usare numeri stratosferici, l'importante è sapere come spiegare.

Il compito è interessante, e so bene come sia tutt'altro che semplice scrivere una consegna comprensibile per gli alunni che non comporti la necessità di successivi chiarimenti da parte dell'insegnante, come succede in (63-73). Il punto è che la consegna non è chiara: cosa significa 'relazione fra due uguaglianze'? Se l'insegnante intendesse riproporre l'attività in questa o in altre classi le suggerirei di modificare in parte il testo, ad esempio: 'Costruisci l'uguaglianza fra due rappresentazioni differenti dello stesso numero'.

Il compito presenta potenzialmente le proprietà elencate, ma è necessario prestare attenzione: anzitutto suggerisco di utilizzare l'espressione 'membri di un'uguaglianza' al posto di 'due uguaglianze': agli alunni viene infatti richiesto di "costruire la relazione" tra due numeri a *e* b *costituenti i membri di un'uguaglianza del tipo* a=b *e non tra due uguaglianze (ad esempio tra* a=b *e* c=d*); inoltre anche la richiesta "costruite la relazione" mi sembra poco efficace, tra i due membri di un'uguaglianza infatti ci possono essere solo due relazioni possibili: o sono entrambi rappresentazioni (canoniche o non canoniche) dello stesso numero o sono rappresentazioni di due numeri diversi. Forse sarebbe stato più centrata una richiesta del tipo: "Prova a costruire un'uguaglianza e a determinare se è vera o falsa utilizzando le strategie che ritieni più opportune".*

[28] Effettivamente è sensato che la percezione di Ajla sia di aver fatto un vero/falso, credo però che questa risposta dovrebbe suonare come un campanello di allarme: al gruppo classe non è rimasta la percezione di star confrontando membri di un'uguaglianza per stabilirne la verità quindi, probabilmente, per come è stata proposta, l'attività non ha raggiunto l'obiettivo prefissato.

[29] Rimando al Com-22 e al Com-27 per la parte terminologica. Aggiungo che, a mio giudizio, sarebbe stato più utile per gli alunni e più significativo per l'insegnante se a ricapitolare quanto svolto finora fossero stati i bambini.

[30] Questo aspetto non emergeva dalla richiesta (63). Mi interrogo inoltre sulla ragione del richiedere solo uguaglianze vere, dato che agli alunni potrebbe invece essere lasciata la possibilità di determinare la verità dell'uguaglianza. Colgo l'occasione per far notare che, fino ad adesso, non sono state proposte uguaglianze false, che credo invece avrebbero dato dinamicità allo svolgimento dell'attività e avrebbero promosso riflessioni potenzialmente diverse rispetto alle uguaglianze vere.

[31] Ritengo opportuno non accontentarsi di questi 'mozziconi di risposta' ma piuttosto richiedere agli alunni di formulare sempre risposte che contengano soggetto, verbo ed eventuali complementi.

[32] Credo che ci sia un refuso nel riferimento all'intervento di Domenico che non compare nella trascrizione.

[33] Credo che riferirsi alle quattro operazioni come 'strategie' non sia appropriato: le operazioni infatti non costituiscono strategie. Le strategie di confronto sono piuttosto riferibili all'accorgersi che un numero è presente in due diverse rappresentazioni in entrambi i membri dell'uguaglianza, all'utilizzare le proprietà delle operazioni per rendere evidente le analogie tra tali membri, eccetera. Inoltre, al fine di promuovere l'uso di un lessico che rimandi ad una visione relazionale *della matematica, anziché alle operazioni sarebbe opportuno far riferimento ai termini somma, differenza, prodotto e quoziente. L'osservazione è molto importante, e fa riferimento allo spartiacque concettuale e lessicale tra pensiero procedurale e pensiero relazionale.*

[34] Mi rendo conto che spesso, nel mio insegnamento emerge la parte procedurale e non sempre quella relazionale ma è un difetto che mi porto dietro e che cerco di contenere.

Anche in (81) emerge un retro-pensiero procedurale

Ritengo significativo questo commento, che rappresenta la prova dell'alta valenza formativa dei Diari, il cui obiettivo, oltre essere strumenti di ricerca per il Progetto ArAl, è proprio quello di permettere agli insegnanti di riflettere a freddo sul proprio operato (e su quello altrui), analizzarlo, valutarlo, ed eventualmente modificarlo e migliorarlo.

74. *La classe lavora*.
75. I: Partiamo con la prima di Ajla.
76. Ajla: Io ho fatto:

$$15:3=3\times5.$$

77. I: Perché sono uguali?[35]
78. Ajla: Perché 3×5 è 15 invece 15:3 è 5...
79. I: Quindi sono uguali?
80. Ajla: No, ho sbagliato...
81. I: Vi ho chiesto di cercare uguaglianze vere, non di stabilire se sono vere o false. Vi ripeto che non c'è solo il calcolo, ma prima del calcolo dovete spiegare qual è la proprietà,[36] la strategia che ci serve per capire l'uguaglianza. Chiaro?[37]
82. Elena:

$$8\times3\times12=24\times12$$

è uguale perché c'è la proprietà associativa nel 8×3, perché 8×3 è 24 e quindi 24×12 è uguale a 24×12.[38] [39]
83. I: Siete d'accordo?
84. Alunni: Sìì.
85. I: Brava Elena!
86. Salomè:

$$20\times3\times2=6\times2.$$

87. I: Spiegaci perché sono uguali.
88. Salomè: 3×2 è 6 e 6×20 è 120 e 6×2 è 12 però poi dobbiamo mettere lo 0 quindi 120.[40]
89. I: Ho sbagliato a scrivere? No...
90. Salomè: Solo che basta mettere lo 0.
91. I: Ricomincia per favore e spiegaci bene perché non so cosa devo scrivere se non mi spieghi bene. Puoi anche correggere mentre la riscrivo se ne hai bisogno.
92. Salomè:

---

[35] *Se l'insegnante non avesse specificato che le uguaglianze devono essere vere, sarebbe stato possibile avviare un confronto tra i due membri dell'uguaglianza proposta da Ajla. Dato però che è stato specificato che devono essere vere, anche in questo caso, come già commentato nel Com-20, ritengo che la domanda dell'insegnante sia utile al fine di far riflettere autonomamente l'alunna sull'uguaglianza che ha proposto: la domanda non dà suggerimenti, lascia Ajla libera di ragionare. Peccato che poi l'errore di calcolo commesso dall'alunna non venga commentato né da lei né da nessun altro: si sarebbe potuto sfruttare per cercare, per esempio, di rendere vera l'uguaglianza di Ajla: credo sarebbe stato un buono spunto di riflessione.*

[36] *Non è detto che sia necessario ogni volta applicare una proprietà; inoltre, l'insegnante fa riferimento a 'prima del calcolo', che confermerebbe l'ipotesi che ho espresso nel Commento 12 che 'gli alunni pensino alle proprietà riferendole solo/prevalentemente ai calcoli'. In questo caso una buona argomentazione potrebbe essere: "15:3 è la rappresentazione non canonica di 5, 3×5 è la rappresentazione non canonica di 15, si può concludere che 15:3<3×5".*

[37] *Anche in questo caso mi rifaccio a quanto commentato nel Com-3. Data l'evidente deriva procedurale dell'attività, si sarebbe dovuto interromperla momentaneamente per chiedere ad uno o più alunni di spiegare all'insegnante e alla classe quale sia, a loro giudizio, il senso di Confrontare senza calcolare.*

[38] *Invito l'insegnante, nel prosieguo dell'attività, ad approfittare di interventi come quelli di Simone (97), Elena (114) e Domenico (122) e Gaia (124) per favorire il passaggio da un punto di vista* procedurale *ad uno* relazionale, *favorendo un'interpretazione delle frasi che ponga in evidenza il concetto di forma canonica e non canonica di un numero. Molti dei commenti degli alunni sono sì corretti, ma rimangono ad un livello* procedurale. *Un'argomentazione* relazionale *potrebbe essere: "8×3 a sinistra è una rappresentazione non canonica di 24 a destra, 12 è presente in entrambi i prodotti, posso concludere che 8×3×12=24×12, cioè che l'uguaglianza è vera".*

[39] *L'intervento di Elena fa intravedere uno spunto di approccio relazionale al confronto. Si sarebbe potuto sfruttare di più quanto affermato dall'alunna, chiedendole di riformulare la propria argomentazione introducendo termini come* rappresentazione canonica e non canonica, prodotto *e* membro *o anche chiedendo ai compagni di commentare la sua argomentazione.*

[40] *Si può definire "Mettere lo zero" un'espressione gergale, estremamente povera sul piano concettuale, sulla quale si deve intervenire. Qual è per l'alunno il significato matematico di quello che dice? Suggerirei in un caso simile, di chiedere "Cosa intendi con 'mettere lo zero'?" È necessario che gli alunni sappiano spiegare che 120 è il prodotto fra 12 e 10. Questi sono chiarimenti fondamentali perché l'obiettivo principale del Progetto ArAl è quello di rendere gli studenti consapevoli dei significati delle scritture in linguaggio matematico. Una spiegazione potrebbe essere "Ai lati dell'uguale sono tutti prodotti; a sinistra 3×2 è una forma non canonica di 6; 20>2, quindi: 20×3×2≠6×2 o, più precisamente, 20×3×2>6×2". Simone (97), confrontando le forme dei numeri, intraprende una strada interessante in questo senso ma non ha strumenti sufficientemente chiari per portarla avanti, e infatti non sa come proseguire.*

20×3×2=6×2×10.

93. I: Ok! Senza calcolarlo, perché sono uguaglianze? Me lo puoi spiegare?... Qualcuno riesce a spiegare l'uguaglianza di Salomè senza calcolarla, vedendoci una proprietà, una relazione?[41] [42]
94. Gaia: 2×10=20 e poi 6×2 è 12.
95. Simone: 3×2=6 e 20 è uguale a 2×10.
96. I: Perché la prima scrittura è uguale alla seconda?
97. Simone: Perché 20 è la forma canonica di 2×10 e 3×2 è la forma non canonica di 6, quindi …[43]
98. I: Proviamo a spiegare meglio in modo che si capisca qual è la prima e qual è la seconda scrittura, perché in questo momento se dovesse entrare qualcuno non capirebbe come mai la prima scrittura è uguale alla seconda.[44] [45]
99. Salomè: È un'uguaglianza...[46]
100. I: Ma perché è un'uguaglianza?[47] Leonardo che dice?
101. Leo...
102. I: Adele?
103. Adele: Che...
104. I: Proviamo a spiegare bene qual è la relazione tra le due scritture.
105. Adele: 2×10 è la forma non canonica di...
106. I: Allora ragazzi, 2×10… Se tu me la spieghi così, io non capisco questo 2×10 dov'è non capisco se lo trovo nella scrittura sopra, nella scrittura sotto, nell'uguaglianza a destra, nell'uguaglianza a sinistra… [48] 2×10 è 20 e questo lo sappiamo tutti ma in questo caso c'è il bisogno che voi confrontiate le due scritture come avete già fatto per stabilire l'uguaglianza e poi dovete rendere chiara la spiegazione.[49] Gaia?
107. Gaia: 2×10…
108. I: Dove si trova 2×10? Io non lo so, ho bisogno che voi spieghiate dove si trova 2×10. Quindi partiamo spiegando dove dobbiamo guardare.
109. Ajla: Avevo fatto un'operazione di 20×3×2 e 6×2×10; per sapere che c'è un'uguaglianza bisogna fare 2×10 che è 20, che si trova nell'altra operazione e 3×2 è 6 quindi vuol dire che c'è un'uguaglianza.[50] [51]
110. I: Meglio… se c'è qualcun altro che vuole provare, vediamo. Brava Ajla, ma cerchiamo di dirlo con più precisione.
111. Salomè: C'è la proprietà associativa.

---

[41] *Qui l'insegnante si esprime intrecciando diversi punti di vista: "senza calcolarla" (indicazione relazionale), "vedendoci una proprietà" (per le ragioni espresse nel mio commento 12 l'indicazione è tendenzialmente procedurale), "[vedendoci] una relazione" (indicazione relazionale).*

[42] *Effettivamente, questo intervento è rappresentativo delle considerazioni dell'insegnante in merito al proprio operato, considerazioni espresse nel Com-4 e nel Com-17.*

[43] *Che strano: come mai solo ora emerge la conoscenza di forma 'canonica' e 'non canonica'? È evidente che l'insegnante ha lavorato in questo senso, e mi chiedo perché non abbia guidato la discussione in questa direzione e non abbia approfittato dei pochi interventi come questo.*

[44] *L'insegnante in questo caso è intervenuta, secondo me, sviando l'attenzione della classe dal bell'inizio dell'argomentazione di Simone (97). Sarebbe stato meglio chiedergli di concludere la sua frase aiutandolo a completare quel "quindi".*

[45] *Mi sembra che sia Simone sia Gaia siano sulla buona strada: forse sarebbe stato più utile incoraggiarli, anziché dir loro che non stavano argomentando in maniera chiara. Trovo sia un peccato che nessuno dei due abbia più ripreso la parola (salvo un timido intervento di Gaia (107)).*

[46] *La risposta di Salomè alla richiesta dell'insegnante potrebbe derivare dal fatto che sono state analizzate solo uguaglianze vere. Per l'alunna forse non è chiaro che le uguaglianze possono essere anche non vere, quindi giustifica che i due membri sono uguali in quanto membri di un'uguaglianza. Rimando al Com-30.*

[47] *Questa domanda potrebbe creare un'ambiguità a livello terminologico tra 'uguaglianza' e 'uguaglianza vera': l'insegnante qui vuole chiedere ai bambini perché è* un'uguaglianza vera*, non perché la scrittura matematica in oggetto sia* un'uguaglianza*.*

[48] *Condivido la richiesta agli alunni di chiarire ogni volta a quale membro dell'uguaglianza si stanno riferendo, però prima sarebbe necessario negoziare tale termine insieme al gruppo classe: utilizzare 'Membro'? 'Scrittura'? 'Uguaglianza a destra'?*

[49] *Effettivamente si ha l'impressione, come sottolinea l'insegnante nel suo commento 3, che lei dica 'troppo'.*

[50] *Un altro intervento* procedurale*: "ho fatto un'operazione", "bisogna fare", "si trova nell'altra operazione".*

[51] *Credo sia evidente la difficoltà dell'alunna nell'utilizzare termini appropriati: in un'ottica relazionale, sarebbe più appropriato riferirsi a 20×3×2 e 6×2×10 come prodotti, non come operazioni (o come moltiplicazioni). Inoltre, si nota l'ambiguità evidenziata nel Com-34: l'alunna infatti utilizza il termine 'uguaglianza' per riferirsi ad un'uguaglianza vera.*

112. I: Dove c'è la proprietà associativa? Dire questo ha molto senso, ma cerchiamo di inserirlo in un discorso.[52]
113. Salomè: Nella prima scrittura c'è il prodotto della proprietà associativa che è anche nella seconda scrittura come forma canonica.[53]
114. Elena: 20×3×2 è uguale a 6×2×10 perché nella prima scrittura il 20 è rappresentato nella forma canonica mentre nella seconda scrittura il 20 è rappresentato in forma non canonica cioè 2×10; invece nella prima scrittura è il 6 che si trova in forma non canonica, cioè 3×2.
115. I: Benissimo![54] Ora mi sembra chiaro, bravi! Ce l'abbiamo fatta. Continua Leonardo.
116. Leo:

    $$16\times3=48\times1.$$

    È uguale perché calcolo[55] 16×3 è 48, 48×1 è sempre 48 perché un numero moltiplicato per uno resta sempre lo stesso.
117. I: Ok! Calcolandolo, va benissimo. E se non lo dovessimo calcolare da dove capisco che c'è l'uguaglianza?[56]
118. Salomè: Dal fatto che 48 è il triplo di 16 e 16 è la terza parte di 48.
119. Adele: C'è l'uguaglianza perché 16 è la terza parte di 48 e 48 è il triplo di 16.

---

[52] *Anche qui: forse sarebbe stato più opportuno un semplice invito a non limitarsi a dire "C'è la proprietà associativa" ma a formulare un'argomentazione che sia tale.*

[53] *Anche in questo caso (come in Com-39) si intravede uno spunto di approccio relazionale al confronto. Dedicherei però maggiore attenzione alla cura del linguaggio: "il prodotto della proprietà associativa" (riferito a 3×2) non è una dicitura chiara. Si sarebbe potuto suggerire all'alunna di riformulare la propria argomentazione utilizzando termini come 'forma non canonica' e 'relazione moltiplicativa'.*

[54] *Concordo sulla precisione e correttezza dell'intervento di Elena. Aggiungo solo che, se ritenuto opportuno, si potrebbe arricchire la conclusione di Elena (114) guidando la classe verso la 'dimostrazione' della verità dell'uguaglianza attraverso il linguaggio matematico:*

20×3×2=6×2×10 *si confrontano le rappresentazioni canoniche del 20 e del 6 con le rispettive rappresentazioni non canoniche;*

20×3×2=6×2×10 *perché l'uguaglianza sia verificata, è necessario esplicitare che tali RC e RnC sono legate da relazioni moltiplicative.*

[55] *L'utilizzo del verbo 'calcolare' stona con il resto del confronto di Leo, che invece potrebbe suggerire anch'esso uno spunto di approccio* relazionale *al confronto. Non so dire se abbia utilizzato 'calcolare' per abitudine o perché davvero ritiene che sia necessario calcolare per dimostrare la verità dell'uguaglianza, invito ad indagare.*

[56] *Leo credo avesse spiegato bene perché oltre al calcolo ha motivato la sua scelta con una regola chiara e precisa ma io ho insistito che non si parlasse di calcoli quando forse in casi come questo, dove il calcolo è supportato da una regola precisa, si potrebbe ritenere buona come spiegazione.*
Certo, è una buona spiegazione procedurale*. L'insegnante ha fatto benissimo, comunque, a chiederne una* relazionale*.*
Concordo sul fatto che a livello concettuale l'argomentazione di Leo sia da ritenersi valida. Come espresso nel Com-55, però, non è chiaro il motivo per cui ha utilizzato il verbo calcolare*: se si crede sia stato usato per abitudine, avrei semplicemente suggerito a Leo di utilizzare termini più appropriati ad un approccio relazionale; se invece si ritiene che l'alunno sia ricorso al verbo* calcolare *perché convinto che fosse necessario calcolare, lo avrei fatto riflettere sul fatto che non è lo scopo dell'attività.*

120. I: Penso che vada bene![57] Ettore, continua.
121. Ettore: 20×5×3=100×3 perché 20×5 è uguale a 100 e poi per 3 è 300, c'è la proprietà associativa.
122. Domenico: Nella prima operazione il 100 è in forma non canonica, nella seconda in forma canonica.[58]
123. I: Perfetto, ok! Qualcuno che abbia uguaglianze con addizioni e sottrazioni?[59]
124. Gaia:

$$30+6=6\times6$$

30+6 è 36 e 6×6 è 36, sono forme non canoniche di 36 quindi sono uguali.[60] [61]

125. I: Ottimo lavoro. Bravi.[62]

---

[57] *Anche in questo caso (come in quello di Leo, (Com-56)), quanto affermato da Salomè e Adele va sicuramente bene a livello concettuale: avrei quindi suggerito di richiedere agli alunni di esprimersi con un linguaggio più appropriato.*

[58] *Mi piacerebbe poter indagare la ragione per cui alcuni alunni utilizzano spontaneamente termini che rimandano ad un approccio relazionale (122) e altri invece no (121): in casi come questo, non riesco a capire se la differenza è solo lessicale oppure se è anche concettuale. Il quesito è importante e tocca un punto nodale ma tutt'altro che semplice da gestire. Per esempio: la laureanda definisce* relazionale *l'intervento di Domenico, ma l'argomentazione dell'alunno è, in realtà,* ibrida*: quando dice "Nella prima operazione il 100 è in forma non canonica" in realtà fonde in una frase di dieci parole un retropensiero* procedurale*, che gli fa vedere 20×5 come operazione, e uno* relazionale*, che gli fa vedere 20×5 come forma non canonica. L'argomentazione di Domenico esprime una sorta di 'strabismo concettuale'. La metterei così: sul piano della teoria i due piani possono diventare ben distinguibili per gli alunni: (i) il punto di vista* procedurale *fa riferimento ad operazioni, calcoli, risultati; (ii) il punto di vista* relazionale *fa riferimento a rappresentazioni di un numero, oggetti, processi, prodotti. Come pone in evidenza Anna Sfard, la costruzione dei concetti algebrici si sviluppa per successivi livelli di astrazione ma prevalentemente attraverso* processi computazionali*, pertanto ogni oggetto matematico viene a riassumere in sé due aspetti complementari come facce di una stessa moneta. Nel primo aspetto prevale il punto di vista operazionale, che è dinamico e sequenziale, nel secondo l'oggetto è visto come entità statica e fuori dal tempo e si considera dal punto di vista della sua struttura. Lo sviluppo del pensiero algebrico è caratterizzato dal* passaggio dal procedurale allo strutturale*. Attraverso la* nominalizzazione *– cioè attribuendo un nome agli oggetti matematici ('somma', 'prodotto', 'doppio', 'monomio', ...), – si condensano significati, e questo passaggio dai* processi *agli* oggetti *costituisce un'impresa complessa per accedere con crescente consapevolezza al pensiero matematico. Il passaggio dal verbale al nominale avviene durante la maturazione del* balbettio algebrico *attraverso l'evolversi continuo degli intrecci tra le esperienze concrete, il linguaggio naturale e i linguaggi della matematica, verso la costruzione graduale di conoscenze e di competenze sempre più evolute. In conclusione, l'utilizzo consapevole o meno di certi termini dipende da aspetti che riguardano maturità, propensione alla concentrazione, spirito di collaborazione, competenze linguistiche, capacità di assumere responsabilità, eccetera, che fanno sì che ogni alunno segua un proprio percorso che l'insegnante ha il compito (molto complesso) di interpretare e guidare.*

[59] *Di nuovo, sarebbe stato meglio far riferimento a somme e differenze (come evidenziato nel Com-33).*

[60] *Brava! Al posto dell'insegnante le avrei anche chiesto di precisare che tipi di rappresentazione sono (additiva e moltiplicativa), in modo da aumentare la familiarità con questi termini e i relativi concetti.*

[61] *Rimane il dubbio espresso al Com-58: Gaia ricorre al concetto di RnC per abitudine o perché lo ha interiorizzato? Rimando inoltre al Com-15: per poter procedere con il confronto, i membri dell'uguaglianza devono essere ricondotti a rappresentazioni non canoniche quanto più simili possibile.*

[62] *L'attività si è conclusa appena in tempo per l'intervallo quindi non ho potuto chiedere e approfondire il grado di difficoltà riscontrato da loro ed eventuali dubbi emersi. Ritorna qui il tema della 'fretta', affrontato nel Com-26. Ritengo che un numero molto minore di equivalenze avrebbe consentito tempi più distesi, avrebbe dato maggiore spazio al confronto tra le varie strategie degli alunni e avrebbe consentito di approfondire gli aspetti citati dall'insegnante. La classe è brillante e partecipativa (sono intervenuti 13 alunni su 22!) ma non avere scritto nessun passaggio alla lavagna - come supporto per le argomentazioni degli alunni che sono intervenuti, e per favorire la riflessione a classe intera - ha costituito, dal mio punto di vista, uno dei maggiori ostacoli allo svolgimento dell'attività. Ribadisco infine l'importanza della correttezza lessicale: essa è sia causa sia effetto dello sviluppo del pensiero algebrico in chiave relazionale.*