2 dicembre 2024 1

Commenti Emma Pareti, laureanda
Commenti Insegnante di classe
Commenti Giancarlo Navarra

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE: La classe 3ª B è composta da 20 alunni, 10 femmine e 10 maschi. Sono presenti 7 alunni stranieri. La classe è eterogenea, ci sono due alunni con BES e un gruppo che, più di altri, si mostra partecipativo alle sollecitazioni didattiche. Abbiamo lavorato dalla classe prima con le tematiche Aral quali la rappresentazione canonica e non canonica di un numero, il significato relazionale del segno uguale (anche attraverso l'uso della bilancia), il numero sconosciuto e alcune sue rappresentazioni, Brioshi e le traduzioni dal linguaggio naturale al linguaggio matematico e viceversa. Stiamo inoltre affrontando le proprietà delle operazioni, in particolare la proprietà commutativa, associativa e invariantiva.

PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ: Dopo aver lavorato sulle attività di rappresentazione[1] proposte nelle prime pagine delle dispense fornite da Giancarlo Navarra relative alla classe prima e seconda, abbiamo iniziato da poco ad affrontare l'attività su "confrontare senza calcolare", verificando semplici uguaglianze.

1. *L'insegnante scrive alla Lim questa frase, individualmente ogni bambino la scrive sul proprio quaderno:*[2]
   $47+38 \stackrel{?}{=} 40+30+7+8.$
2. Cosa mi potete dire?[3]
3. *Alzano la mano in diversi.*[4]
4. *Viene alla Lim Giuseppe che mentre dice che è vera, inizia a disegnare una bilancia*[5] *dicendo che è in equilibrio.*
5. Giuseppe: Quindi è vero che sono uguali, posso togliere il punto interrogativo sull'uguale.

---

[1] *Le attività proposte erano molto ben graduate e ciò ha facilitato l'approccio al confronto, senza calcolare. Ho notato che diversi bambini sono andati subito alla ricerca di forme canoniche e non canoniche dello stesso numero, invece io mi aspettavo che molti verbalizzando e argomentando sul verificare uguaglianze si appoggiassero di più ai calcolo. Una bella sorpresa! Questo è evidentemente indice dell'ottimo lavoro svolto dall'insegnante, lavoro di cui ho potuto constatare la qualità sia durante lo svolgimento dell'attività in oggetto sia durante le diciotto ore di osservazione in classe: evidentemente la prospettiva proposta e sviluppata dal Progetto ArAl è stata resa intimamente propria dagli alunni, grazie anche all'abilità e professionalità dell'insegnante di classe.*

[2] *Un plauso all'autonomia di questi bambini: riuscire da soli a prendere appunti in terza primaria (durante un'attività non così lineare) è indice della loro grande attenzione e partecipazione; inoltre, per l'insegnante rileggere quanto scritto dagli alunni è sicuramente prezioso per poter avere un'idea più precisa sia di cosa hanno effettivamente appreso sia di come lo hanno elaborato.*

[3] *Loro sanno che '=' con il punto interrogativo sopra '$\stackrel{?}{=}$' significa che l'uguaglianza è ancora da stabilire, è da dimostrare che ci sia, viene letto "… è uguale a… ?" Dato che – come affermato dall'insegnante – si tratta di un tipo di attività ancora poco conosciuto dagli alunni, si sarebbe potuta porre una domanda più mirata, che desse delle indicazioni agli alunni in merito al lavoro da svolgere; oppure far precedere l'inizio dell'attività da una veloce ricapitolazione di cosa significa 'Confrontare senza Calcolare' (CsC), nell'ipotesi che gli alunni già lo sappiano. D'altra parte, per come si è svolta l'attività, forse il mio è uno scrupolo eccessivo: gli alunni si dimostrano infatti ben consapevoli di cosa significa CsC.*

[4] *Il gruppo classe è oggettivamente molto partecipativo: l'ho notato sia durante lo svolgimento dell'attività sia durante l'osservazione della quotidianità degli alunni e dell'insegnante. D'altra parte, come riportato anche dall'insegnante nella sua presentazione della classe, tendono ad intervenire sempre le stesse persone e non sempre si ha premura di coinvolgere gli alunni più silenziosi, ma anzi spesso viene interpellato chi si propone.*

[5] *Ho introdotto lo scorso anno "la bilancia" per rendere più evidente il significato relazionale dell'uguale, ed è stato un ottimo mediatore didattico. Adesso spesso la rappresentano per stabilire un'uguaglianza. Non so se però ci stanno facendo anche troppo riferimento.*
Come ho detto più volte, ogni mediatore è utile finché mantiene un'autentica efficacia come mediatore semantico. Se viene usato anche quando non è necessario (o non lo è più), allora rischia di diventare uno stereotipo, e di perdere quindi il senso originale che possedeva quando è stato introdotto. Vedi anche il mio Com-10 (35).
A mio giudizio, non vi stanno facendo 'troppo' riferimento: è uno strumento per loro utile, un validissimo traghetto semantico che hanno fatto proprio. Al momento opportuno, l'insegnante sarà certo in grado di indirizzare la classe verso l'utilizzo di termini 'più da grandi', ma adesso lascerei che utilizzassero lo strumento 'bilancia' quanto e come vogliono, anche perché mi sembra che li supporti nel costruire ragionamenti anche molto elaborati.

6. I: Spiega a tutti noi perché pensi che sia così.[6]
7. Giuseppe: Perché a sinistra ci sono le forme canoniche dei numeri e a destra le forme non canoniche degli stessi numeri.[7]
8. I: Bene! Prova a spiegarlo meglio a tutti,[8] indica a quali ti riferisci.
9. Giuseppe: Perché qui c'è 47 e anche di là, perché sposto il 7 vicino a 40 e la loro somma è 47 (*disegna degli archetti*).
10. I: Quale proprietà hai applicato?
11. Giuseppe: La commutativa.
12. I: Prova a dirlo meglio.
13. Giuseppe: Ho usato la proprietà commutativa.
14. I: Che dice che…
15. Giuseppe: … che dice che se cambio il posto agli addendi, la loro somma non cambia… quindi sposto il 7 vicino a 40. Quindi a sinistra dell'uguale ci trovo il 47, ma anche a sinistra della bilancia.
16. I: Scritto come?
17. Giuseppe: Il 47 a sinistra è scritto nella forma canonica di 47 *(lo colora)*, poi a destra dell'uguale c'è 40 più 7 che è la forma non canonica di 47 *(lo colora nello stesso modo)*.
18. I: Dimmi in linguaggio naturale cos'è 40+7.[9]
19. Giuseppe: È la somma tra il numero 40 e il numero 7.
20. I: Bene, poi che possiamo dire?
21. Giuseppe: Questa è la forma canonica di 38, ed è qui a sinistra, ma 38 è anche di là a destra, perché c'è la somma tra 30 e 8 che è la forma non canonica[10] *(disegna sopra un archetto per unirli)*.[11]
22. I: Quando li hai rappresentati sulla bilancia avevi già fatto questi ragionamenti?
23. Giuseppe: Sì, li ho disegnati con i piatti alla stessa altezza perché avevo visto che sono uguali e la bilancia è in equilibrio.
24. Mattia *(alza la mano)*: Allora io ho fatto in un altro modo *(si alza e viene alla Lim)*.[12]
25. I: Descrivi cosa vedi.[13]
26. Mattia: Io vedo a sinistra la somma tra 47 e 38 e di là dall'uguale vedo la somma tra 40, 7, 30 e 8, io ho fatto così… allora io comincio da 47 e faccio due frecce, lo smonto in 40 e 7 *(non mette nessun segno tra i due numeri)*.
27. I: Ma tra loro che relazione c'è?
28. Mattia: Ah, metto il segno *(e scrive +)*.
29. I: Quindi cosa hai scritto?

---

[6] *È sempre valido chiedere agli alunni di rivolgersi non all'insegnante ma a tutto il gruppo classe, almeno per due motivi: il primo è che così l'alunno è spronato ad argomentare nella maniera più chiara possibile, dato che si rivolge ad una vasta platea; il secondo è che così vengono coinvolti tutti gli alunni, evitando quello sgradito effetto di 'conversazione privata' tra insegnante e alunno interpellato.*

[7] *Questa precisazione di Giuseppe è da evidenziare: non ha parlato di 'forme canoniche dei numeri' ma di 'forme canoniche degli stessi numeri'. Ciò suggerisce (e il generale andamento dell'attività lo conferma) che sia stato svolto un ottimo lavoro sulle relazioni tra la forma canonica di un numero e le sue infinite forme non canoniche.*

[8] *Ottima la richiesta di 'spiegare meglio'. Avrei però suggerito di chiedere all'alunno di evidenziare anche la natura delle relazioni all'interno dei due membri dell'uguaglianza: si tratta in entrambi i casi di relazioni additive, di somme. Non è sufficiente che i numeri compaiano a entrambi i membri in forma canonica e non canonica: è necessario che le relazioni che li legano siano le stesse perché l'uguaglianza sia verificata. Condivido l'osservazione, soprattutto per la sua validità generale.*

[9] *Per quanto sia perfettamente d'accordo sulla necessità dell'uso corretto della terminologia, trovo che l'argomentazione di Giuseppe sia stata già frequentemente interrotta dalle domande dell'insegnante. Nell'ipotesi (fondata, secondo la mia osservazione del gruppo classe) che Giuseppe padroneggi la semantica del lessico specifico, chiedergli in questa fase di utilizzarlo mi sembra meno utile rispetto al lasciarlo libero di argomentare.*

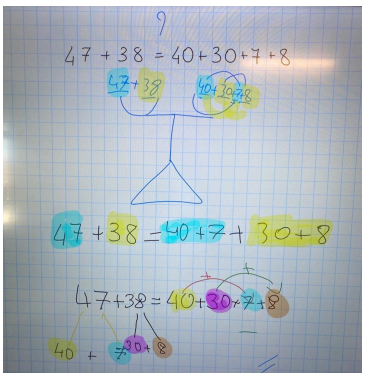
[10] *È sempre meglio chiedere agli alunni di specificare di quale numero è la forma (canonica o non canonica), in questo caso 'forma non canonica di 38'.*

[11] *Si tratta della quarta 'iniziativa grafica' che Giuseppe prende alla lavagna (9 e 17): è evidente che l'appoggio grafico utilizzato quotidianamente dall'insegnante (archetti, colori…) è utile agli alunni, che infatti lo ripropongono spontaneamente.*

[12] *Che Mattia, spontaneamente, prenda la parola per dire che ha utilizzato un'altra strategia, si alzi e vada alla LIM credo sia la prova del grande coinvolgimento che ho sempre riscontrato in questo gruppo classe, coinvolgimento senz'altro favorito dall'insegnante.*

[13] *Anche in questo caso, dato lo spirito d'iniziativa di Mattia, avrei lasciato l'alunno libero di esporre la propria strategia, con una richiesta del tipo "Bene, illustraci passo passo cosa hai fatto". Trattandosi di una classe terza primaria è certo possibile che gli alunni abbiano necessità di essere guidati nell'argomentazione, ma non mi sembra il caso di Mattia, almeno per quanto riguarda questo specifico episodio.*

30. Mattia: La somma tra 40 e 7.
31. I: E che cosa rappresenta?
32. Mattia: È la forma non canonica di 47, poi prendo il 38 *(traccia due frecce che partono da 38)* e anche qui scrivo la somma tra 30 e 8 che è la forma non canonica di 38, sicché è 38.
33. I: Ora come fai a dimostrare che è un'uguaglianza?
34. Mattia: Vedrai, sono uguali!
35. I: Mattia usa i colori per dimostrarlo a tutti, cerca le parti uguali a destra e a sinistra e colorale nello stesso modo[14].
36. Mattia: *(dopo aver colorato nello stesso modo le parti uguali)* Ecco, ora ho fatto la verifica, ho controllato che è vera![15]
37. Bene! Una domanda per tutti… ma queste che relazioni sono…[16]
38. Coro: Additive! Tutte additive.
39. *Questa è l'immagine dell'attività di Giuseppe e Mattia alla Lim:*[17]



---

[14] *Abbiamo utilizzato la strategia dei colori dalla classe prima, come suggerito in MPR-1 per svolgere le attività consigliate nel testo, quindi dovevo aspettare che lo utilizzasse in autonomia, invece ho suggerito troppo.*
La strategia dei colori, come appare evidente dal modo chiaro in cui la usano Giuseppe e Mattia, è davvero molto potente come supporto ed è certamente importante, come scrive l'insegnante, che gli alunni imparino a servirsene spontaneamente per spiegare a se stessi, ai compagni e all'insegnante il loro ragionamento. In termini generali, sarebbe altrettanto importante far capire che non lo devono avvertire come un obbligo, come qualcosa che bisogna fare comunque. *L'insegnante, che sta già guidando la classe verso la conquista di questa autonomia, potrebbe invitare alla riflessione collettiva ponendo questioni come: Perché secondo voi è importante la strategia dei colori? È possibile fare in modo che siate voi a capire quando usarla senza che sia io che vi spingo a farlo?*
Concordo. Vista anche la spontaneità con cui Giuseppe era ricorso alla strategia dei colori, se Mattia fosse stato lasciato libero nell'esposizione del proprio ragionamento è più che probabile che l'avrebbe utilizzata anche lui.

[15] *Dopo che era stata verificata, avrei dovuto far rileggere in modo globale tutta l'uguaglianza. Non solo: la serrata serie di domande poste all'alunno ha fatto sì che lui non abbia avuto la possibilità di creare una propria originale argomentazione, come invece sembrava volesse fare (24). Senz'altro chiedergli di ricapitolare tutto il ragionamento sarebbe stato per lui un buon esercizio di verbalizzazione e per la classe un'occasione per rivedere quanto fatto; ancor meglio però sarebbe stato se la ricapitolazione fosse avvenuta in seguito a una prova di argomentazione autonoma da parte di Mattia che, per come si svolge l'episodio, pare sarebbe stato in grado di illustrare la propria strategia anche senza l'intervento frequente dell'insegnante.*

[16] *L'insegnante ha certo fatto bene a far notare la natura delle relazioni tra i numeri. Mi chiedo però (come suggerito in Com-8) se non sarebbe forse stato il caso di soffermarsi di più su tali relazioni. Ad esempio, si sarebbe potuto chiedere agli alunni cosa sarebbe cambiato se, lasciando invariati i numeri, si fosse sostituita una somma con una differenza, in modo da focalizzare l'attenzione sul confronto tra i simboli matematici: sia Giuseppe sia Mattia, infatti, si sono limitati a confrontare le rappresentazioni canoniche e non canoniche dei numeri presenti nell'uguaglianza, tralasciando il confronto dei simboli matematici.*

[17] *Le questioni che pone l'insegnante e le risposte degli alunni nell'episodio 1-39 mostrano come competenze matematiche e familiarità con la verbalizzazione e l'argomentazione siano in questa classe valori condivisi e caratterizzino positivamente la fluidità della 'conversazione su temi matematici'. Anche in questo caso si può lavorare sull'autonomia nella costruzione delle argomentazioni. L'insegnante potrebbe favorire una riflessione collettiva per negoziare i nodi che favoriscono la produzione di un'argomentazione chiara e completa nell'ambiente 'Confrontare senza calcolare'. L'episodio (7-39) potrebbe fare da traccia in questo senso; per organizzare una buona argomentazione si dovrebbe: far emergere i concetti di forma canonica e non canonica di un numero (7-9); richiamare le proprietà usate (in questo caso la commutativa) (10-15); appoggiarsi alla strategia cromatica (se l'alunno lo ritiene opportuno) (17); favorire la costruzione di definizioni relazionali che pongano in evidenza i nomi degli oggetti (18-21).*

40. I: Continuiamo con una nuova… Sfida!!! Vediamo… che mi sapete dire di questa?
$$15+3\stackrel{?}{=}5\times3+a.$$
Per rendere questa scrittura vera, cioè un'uguaglianza, mi dite quanto deve valere la 'a'?[18]
41. *Sofia si propone, dicendo che ha già capito.*
42. I: Sofia intanto prova a dirmi in linguaggio naturale cosa ho scritto.
43. Sofia: Qui *(indica a sinistra dell'uguale)* c'é la somma tra 15 e 3.
44. I: E a destra dell'uguale?
45. Sofia: C'è 5 per 3.
46. I: Ma dimmelo in linguaggio naturale.[19]
47. Sofia: La somma tra… la somma tra 'a' e questo… *(indica 5×3).*
48. Duccio: C'è 15.
49. I: Ma io ho chiesto di tradurre esattamente quello che vedi scritto…[20]
50. Duccio: C'è il prodotto di 5 per 3.[21]
51. I: Quindi…
52. Duccio: Qui c'è la somma tra 'a' e il prodotto di 5 per 3.
53. I: Quanto deve valere la 'a'[22] perché le due parti siano uguali? Quale numero metteresti al posto di 'a' per fare in modo che l'uguaglianza sia vera?
54. Sofia: Secondo me 'a' deve essere uguale a 10.
55. I: Ecco[23], teniamo questo 10, scriviamo a=10[24], qualcuno ha un'altra idea, avete scritto un valore diverso per 'a'?
56. *In molti alzano la mano per proporsi alla Lim. Chiamo Virginia.*
57. Virginia: Secondo me 'a' è uguale a 3.
58. I: Qualcuno ha altre soluzioni, altri valori?[25]
59. *In molti dicono che ha ragione Virginia.*
60. Sedin: 'a' è uguale a 15.

---

[18] *Credo che indirizzare fin da subito l'analisi verso la ricerca di un valore di* a *che renda vera l'uguaglianza abbia inibito altre potenziali e spontanee considerazioni da parte degli alunni sull'uguaglianza stessa. Mi spiego meglio: nel caso un alunno avesse voluto riflettere su come i possibili valori di* a *influiscono sulla veridicità dell'uguaglianza, questa domanda potrebbe aver inibito il suo ragionamento, poiché focalizza l'attenzione sulla ricerca di un singolo valore di* a*. Una richiesta del tipo: "Confrontate i due membri dell'uguaglianza e poi dite a tutti le vostre riflessioni" avrebbe forse lasciato gli alunni liberi di esplorare l'uguaglianza e di impostare l'analisi ognuno a suo modo. È vero che da (82) in poi vengono indagati gli 'effetti' dei possibili valori di* a*, ma ciò avviene in seguito all'intervento dell'insegnante. A mio giudizio sarebbe stato invece interessante vedere se gli alunni avrebbero riflettuto spontaneamente su tali effetti e solo dopo, se necessario, guidarli nell'analisi.*

[19] *In effetti Sofia si spiega già usando il linguaggio naturale; quella che si aspetta l'insegnante è un'argomentazione relazionale, come quella che dà Duccio (51). Suggerirei di riflettere assieme agli alunni sulla differenza tra "C'è 5 per 3" (46) e "Il prodotto di 5 per 3" (o "fra 5 e 3") (51). Nel primo caso c'è una lettura* sequenziale*, nel secondo una lettura* relazionale*. Con gli alunni si potrebbe arrivare a dire che nel primo caso si leggono semplicemente i simboli nell'ordine in cui sono scritti, nel secondo invece* si dà un nome all'oggetto matematico *'5×3' (prodotto).*

[20] *Anche in questo caso, come già evidenziato in Com-9 e Com-13, avrei lasciato l'alunna libera di esporre la propria strategia, senza incalzarla subito con delle domande. Nell'episodio (42-55) la bambina non ha la possibilità di esporre il proprio ragionamento (di cui sembrava per altro molto convinta (42)), né di apportare riflessioni che amplino le risposte alle domande dell'insegnante. Anche quando Sofia riconosce di aver sbagliato (83) sarebbe stato interessante chiederle quale fosse stato il ragionamento che l'aveva condotta alla riposta errata, così da poter confrontare le strategie di più alunni.*

[21] *Piccola precisazione: l'alunno ha fatto due volte riferimento al 'prodotto di cinque per tre'. Ricordo che, da un punto di vista sia terminologico sia matematico, sarebbe più corretto indicare 5×3 come 'il prodotto di cinque e tre'. In effetti c'è una certa idea procedurale nella formulazione 'prodotto di cinque e tre', ma è anche vero che si può definire 5×3 in molti modi: "Prodotto di 5 e 3" (come suggerisce la laureanda); ma anche 'prodotto fra 5 e 3', 'prodotto di 5 con 3'. Ritengo difficile definire un modo 'corretto'. Possiamo vedere anche questo modo di esprimersi di Duccio all'interno dell'evoluzione del balbettio algebrico destinato a raffinarsi nel tempo grazie all'attenzione dell'insegnante agli aspetti linguistici.*

[22] *Sarebbe meglio 'quanto vale 'a' senza l'articolo (la 'a'), altrimenti l'attenzione si concentra sul simbolo (la lettera dell'alfabeto) e non sul numero che essa rappresenta.*

[23] *Credo che sarebbe stato importante chiedere a Sofia di argomentare la sua frase.*

[24] *"Metafora del frigorifero", come suggerito nel testo: Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni (1.3), tengo questo intervento per poi riprenderlo in seguito. Mi sembra un'ottima idea, attenzione solo a quanto scritto in Com-17 rispetto a far argomentare Sofia circa la propria proposta* a=10.

[25] *Anche qui sarebbe stato meglio invitare Virginia ad argomentare la sua conclusione.*

61. Duccio: Ma che dici … così sarebbe 30 a destra![26]
62. *Tutti gli altri dicono che è giusta solo quella di Virginia.*
63. I: Virginia adesso vediamo come puoi spiegarci che 'a' vale 3… usa i colori o segna come vuoi…[27]
64. Virginia: Allora… *(prende un colore ma è indecisa su cosa colorare).*
65. I: Che trovi di uguale a destra e sinistra?
66. Virginia: Questo è uguale a questo *(colora il 15 e 3×5).*
67. I: Perché puoi dire che sono uguali?
68. Virginia: Sono il numero 15! Però questa è la forma non canonica *(indica 3×5).*
69. I: Bene! E questa *(indico 3×5)* che relazione è?
70. Virginia: È moltiplicativa… perché c'è il per… è un prodotto.
71. I: Virgy, quindi che rappresenta questa 'a'?
72. Vari bambini: È il 3!
73. Sedin: Nasconde un numero.[28]
74. Virginia: È al posto di un numero.
75. Duccio: Sì, ma è misterioso perché ancora non si conosce, anzi… anche secondo me questa volta è il tre.
76. Virginia: Sì è il tre, perché se questi due sono uguali *(si riferisce a 15 e 3×5)* allora 3 a sinistra e 3 a destra.
77. Duccio: Per forza deve essere uguale a 3.
78. Virginia: Se a destra e a sinistra dell'uguale devono essere uguali allora 'a' è sicuramente 3.
79. I: Ok! Benissimo!
80. *Tutti concordano con ciò che ha appena detto Virginia.*[29]
81. I: Adesso riprendiamo la risposta di Sofia… aveva detto che 'a' era uguale a 10…
82. Sofia: Sì… ma mi sa che ho sbagliato.
83. I: Sofia, che succede se ci metti 10 al posto di 'a'? Che posso dire adesso di queste due parti… che simbolo posso usare qua in mezzo?[30]
84. Sofia: … Mmm… uguale no.
85. I: Come mi potresti far capire che relazione c'è tra questi due… c' è un simbolo adatto…
86. Sofia: Quello che "non è uguale" ≠.
87. Virginia: Io metterei il simbolo è minore.
88. I: Virginia dimmi tutta la frase.
89. Virginia: Allora 15 più 3 è minore di…
90. I: Dimmelo in linguaggio naturale.[31]
91. Virginia: La somma tra 15 e 3 è minore del prodotto tra 5 e 3… anzi della somma tra 10 e il prodotto di 3 e 5.[32]
92. *Alla Lim ci sono entrambe le scritture:*

$15+3 \neq 3 \times 5+10$ $\quad$ $15+3<3 \times 5+10$

---

[26] *Ho fatto caso a queste risposte tra Duccio e Sedin solo adesso riascoltando il dialogo... avrei dovuto commentare con loro queste affermazioni. Concordo. Potrei ripetere quello che ho osservato per Sofia e Virginia.*

[27] *Vale anche per questo episodio (64-72) quanto osservato in Com-20.*

[28] *Dire 'Nasconde' un numero va benissimo perché rientra nell'evoluzione del balbettio algebrico, come pure il successivo 'è al posto di' va altrettanto bene. Diciamo che sono fasi intermedie verso la costruzione del concetto che una lettera, di fatto, è un numero che non è ancora definito. Stella Baruk (*Dizionario di matematica elementare*) scrive a proposito della lettera: 'Si potrebbe dire le lettere giocano in matematica, nei confronti dei numeri, il ruolo che le parole giocano in generale nei confronti delle cose: dire o scrivere 'albicocco' è già concepire un'astrazione, cioè avere ottenuto, grazie a segni (sonori o grafici) l'evocazione,* la presenza *nella mente di un oggetto assente'.*

[29] *Davvero proficuo questo scambio di opinioni tra gli alunni (73-79): tutti sembrano aver compreso il significato dell'attività di CsC e riescono a esporre le proprie riflessioni con chiarezza e in maniera autonoma. Invito l'insegnante a incoraggiare sempre scambi come questo, magari proponendo un'analoga attività di CsC senza mai intervenire.*

[30] *Credo sarebbe stato più efficace porre una domanda alla volta e riflettere su ogni risposta, dato che ognuna avrebbe permesso di osservare l'uguaglianza da un differente punto di vista. In questo modo invece Sofia si è limitata a rispondere all'ultima domanda. Noto però con piacere che nell'episodio alle (99-105) tali domande vengono almeno in parte riprese.*

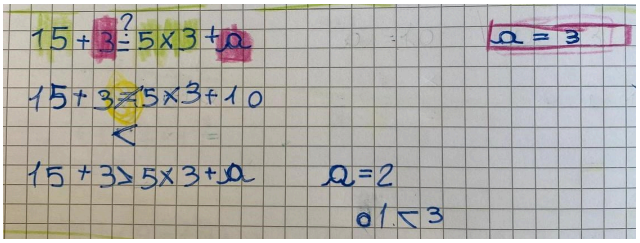
[31] *Modificherei l'invito (v. mio commento 7 (rigo 47). Anche quello usato da Virginia (90) è linguaggio naturale. Si potrebbe favorire la costruzione di una frase* relazionale*, e si potrebbe forse anche cominciare a parlare di nome dell'oggetto matematico. 15 più 3 è la semplice lettura sequenziale di quello che c'è scritto, mentre dire 'la somma fra 15 e 3' significa dare un nome all'oggetto.*

[32] *Ammirevole la precisione di Virginia nel tradurre la disuguaglianza in linguaggio naturale: riesce addirittura a correggersi!*

93. I: Bene! Ma secondo voi quale segno mi dà più informazioni, quale messaggio sarebbe più utile a Brioshi?[33]
94. Lorenzo e Giuseppe: Il secondo.
95. Lorenzo: Mi dice che quello a sinistra è più piccolo dell'altro a destra.
96. Giuseppe: Il "non uguale" non mi fa capire come sono, è meno trasparente!
97. Lorenzo: È opaco! A Brioshi non serve tanto… non gli fa capire molto, invece il segno minore gli fa capire chi è più grande e chi è più piccolo, Brioshi li può mettere in ordine di grandezza.
98. I: Bene, ma ditemi… c'è un modo per far sì che la relazione sia con il simbolo maggiore in mezzo, mi spiego meglio… che valore dovrebbe avere 'a' per far in modo che sia vera questa:

$$15+3>5\times3+a.$$

99. Duccio: 'a' deve essere due… anzi tutti i numeri minori di tre.
100. I: Benissimo, dimmi quali numeri[34].
101. Duccio: 2, 1, e lo zero.
102. I: Posso mettere il 3?
103. Duccio: No, perché così era uguale, dovevo mettere il segno uguale, come ha detto prima Virginia, non posso mettere il segno maggiore.
104. I. OK, OK! Bravi![35]



105. I: Siete pronti per una nuova… Sfida?
106. Tutti: Siii![36]
107. Scrivo alla Lim questa uguaglianza:

$$14+11=15+\square.$$

---

[33] *L'episodio che segue (95-99) è emblematico di quanto la condivisione del quadro teorico con gli alunni da parte dell'insegnante sia una pratica preziosa dal punto di vista didattico: gli alunni sono ben consapevoli di cosa è 'utile' per Brioshi, nonché della differenza tra dicitura* trasparente *e* opaca *e ragionano di conseguenza, arrivando a formulare frasi di alto livello matematico, frasi che sono indice della loro competenza.*

[34] *Dovevo formulare la richiesta in modo che Duccio desse una risposta più ricca e completa. Riascoltando viene fuori quanto sia importante il modo in cui pongo le domande, in alcuni casi è la mia domanda ad essere poco produttiva ai fini di una buona argomentazione. In questo caso sono d'accordo: chiedere quali numeri rendano vera la disuguaglianza non è particolarmente arricchente né stimolante, la risposta di Duccio poteva essere sfruttata meglio.*

[35] *Anche qui, dopo aver inserito i segni adatti, avrei dovuto far rileggere le tre frasi interamente per far vedere le tre relazioni in modo globale. Episodio 40-105: proseguo le considerazioni espresse nel commento 7 (Episodio 1-39). La classe esprime competenze elevate sia in ambito matematico che linguistico. Ora ha bisogno, a mio avviso, di 'prendere il volo'. Non è detto che siano tutti in grado di farlo, ma certamente sarebbe un ottimo esempio se un alunno, anche sulla base di quanto potrebbe essere stato deciso collettivamente, costruisse da solo una frase del tipo: "In '15+3≟5×3+a' '15' a sinistra e '5×3' sono la rappresentazione rispettivamente canonica e non canonica del numero 15. Affinché l'uguaglianza sia vera, è necessario quindi che 'a' sia uguale a 3". Sulla base di questa argomentazione l'insegnante potrebbe poi approfondire altri aspetti, per esempio (come ha fatto durante la lezione): definire il tipo di relazione (additiva, moltiplicativa), ragionare sulla diversità fra i simboli '≠' e '<' come portatori di significato, o appoggiarsi alla strategia dei colori. Così si manifesterebbe in un primo momento, in modo forte, l'autonomia argomentativa degli alunni, e l'insegnante potrebbe associarvi delle domande di chiarimento e di approfondimento.*

[36] *La parola "sfida" è motivante! Lo è tutta l'attività: l'insegnante sta metaforicamente 'spremendo il limone' al massimo (un esempio è in (100): l'invito è davvero stimolante!). Infatti, seppur con gli umani limiti evidenziati nei commenti precedenti, l'attività risulta estremamente ricca, da vari punti di vista: gli alunni si mostrano coinvolti e attenti, intervengono con riflessioni pertinenti che sono indice della loro ottima preparazione (sia sul piano concettuale sia sul piano lessicale); ogni uguaglianza viene sviscerata e osservata da vari punti di vista, non ci si limita a 'svolgere il compitino'; l'insegnante pone domande sfidanti e guida il gruppo classe verso ragionamenti decisamente non banali per degli ottenni. Insomma, l'attività risulta indiscutibilmente efficace per favorire negli alunni lo sviluppo del pensiero algebrico.*

108. I: Chi mi sa dire che numero devo mettere nel quadratino perché questa uguaglianza sia vera?[37] Scrivetelo nel quaderno! Provate[38]
109. Kasim (*viene alla Lim)*: C'è il 10.
110. I: Aspetta… Prima leggi che cosa ho scritto.[39]
111. Kasim: La somma tra quattordici e undici è uguale a quindici più un numero misterioso.[40]
112. I: Kasim, prova a dirlo meglio, cosa c' è a destra dell'uguale?
113. *Kasim rimane dubbioso.*
114. I: Ricontrolliamo insieme ciò che hai detto. La somma tra quattordici e undici è uguale a… *(utilizzo i colori per far vedere a quale corrisponde la parte già letta e lascio bianco ciò che non ha letto in linguaggio naturale)*.
115. Kasim: La somma tra quindici e un numero misterioso.
116. I: Bene, quindi a sinistra e a destra che tipo di relazioni sono rappresentate?[41]
117. *In diversi rispondono con la parola 'additiva'.*
118. I: Kasim, dillo meglio questo suggerimento che hanno detto.
119. Kasim: A sinistra c'è una relazione additiva, e anche a destra c'è una relazione additiva, solo che manca una parte.[42] [43]
120. I Come posso far capire meglio a tutti ciò che manca?

---

[37] *Sarebbe stato meglio chiedere "Quale numero rappresenta il simbolo". Il 'mettere nel quadratino' riporta ad all'idea (più 'bambina', più operativa) di un* contenitore da riempire.

[38] *Anche in questo caso, vale quanto osservato in Com-18. Ottima però la richiesta di scrivere ognuno sul proprio quaderno, come già evidenziato in Com-2. A tal proposito, mi permetto una breve digressione. Talvolta (mai in questo gruppo classe) gli insegnanti durante lo svolgimento di attività sviluppate dal Progetto ArAl chiedono agli alunni di chiudere i propri quaderni poiché ritengono che per seguire riflessioni di un certo livello matematico i bambini non debbano essere 'distratti'. Ho almeno tre considerazioni da fare in merito. La prima è che, proprio perché le attività ArAl a volte richiedono ragionamenti affatto banali, 'appoggiare il pensiero sul foglio' può essere utilissimo per gli alunni, che non devono così tenere tutto a mente e anzi si esercitano a dare forma alle proprie strategie. La seconda è che l'uso del quaderno permette ai bambini di prendere appunti rispetto a quanto sta avvenendo in classe, di modo da poterlo rileggere al bisogno e rifletterci nuovamente sopra. Infine, l'abilità stessa di prendere appunti è essenziale per qualsiasi alunno, non solo per quelli dei gradi scolastici superiori: fa sì che gli alunni sviluppino la propria concentrazione e che siano spronati a fare domande quando un passaggio non è chiaro. Concludo pertanto con un plauso all'insegnante, che sono certa condivida il mio pensiero: ciò è evidente dalla qualità degli appunti presi da tutti gli alunni questo gruppo classe, appunti presi da ognuno autonomamente, in base alle proprie capacità. La digressione è molto interessante, e conferma la grande attenzione della laureanda verso dettagli che sfuggono facilmente all'osservazione. Aggiungo alle tre considerazioni un'ulteriore importanza dell'utilizzo dei quaderni per riportare anche solo frammenti dell'attività durante il suo svolgersi: mi è accaduto più volte di proporre, in certe occasioni, lo scambio di quaderni fra due alunni, e di invitarli ad interpretare l'elaborato del compagno in relazione al proprio rendendo poi pubbliche le proprie considerazioni. Questo accade, per esempio, quando A dice di aver scritto '9+2' e B alza la mano dicendo "Ho fatto come A". In realtà, controllando il suo quaderno, si scopre che B ha scritto non '9+2', ma '9+2='. Lo scambio dei quaderni permette a B di riconoscere nella scrittura di A il suo punto di vista* relazionale*: '9+2' è 'la forma non canonica di 11' (o 'la somma fra 9 e 2') e ad A di riconoscere nella scrittura di B quella che la ricerca ha chiamato 'sindrome da mancanza di risultato', 'ansia di chiusura', 'bisogno di conclusione'. In altre parole A e B, attraverso le loro reciproche interpretazioni e le relative argomentazioni, rendono evidente a tutti che B inserisce il simbolo '=' per* preparare il risultato*, perché la scrittura '9+2' è per lui qualcosa di* provvisorio*; messa lì, 'da sola', appare priva di significato: B è abituato al fatto che, prima o poi, gli verrà chiesto, in una classica* prospettiva procedurale*, "Quanto fa?".*

[39] *Forse sarebbe stato meglio chiedere a Kasim di motivare la sua affermazione.*

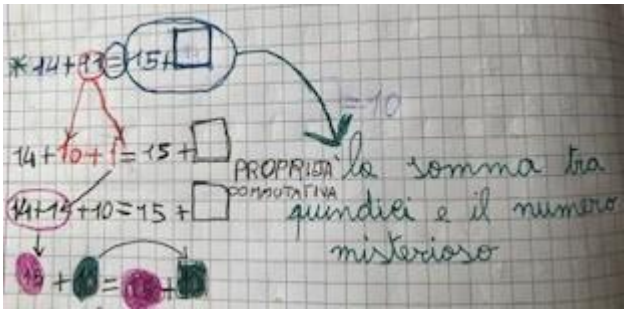
[40] *Mi chiedo perché Kasim abbia espresso in termini relazionali ciò che sta a sinistra dell'uguale come 'somma', ma per ciò che sta a destra si sia attenuto ad una lettura sequenziale 'standard' ('quindici più un numero misterioso'). La risposta che mi do è che il simbolo quadrato non venga ancora chiaramente interpretato come numero all'interno di una somma.*

[41] *L'insegnante lo avrà certamente già notato, ma mi permetto di evidenziare che, alla fine dell'episodio (110-116), sarebbe stato opportuno chiedere a Kasim di ricapitolare quanto detto traducendo autonomamente l'intera scrittura matematica. Inoltre, dato l'approccio procedurale che potrebbe suggerire il suo intervento (110) (l'alunno potrebbe aver svolto un calcolo anziché aver confrontato i due membri dell'uguaglianza), forse sarebbe stato il caso di chiedergli si spiegare all'intero gruppo classe quale fosse l'obiettivo dell'attività.*

[42] *Sarebbe importante far riflettere sul fatto che non è che 'manchi una parte', ma che c'è comunque una relazione fra due numeri, indipendentemente dal fatto che siano noti o sconosciuti.*

[43] *Al membro di destra dell'uguaglianza non manca niente, gli addendi sono entrambi presenti. Un 'numero misterioso' infatti non è un numero 'che manca', è un numero che non si conosce. Trovo che la differenza tra le due visioni non sia da sottovalutare: pensare il numero misterioso come un ente mancante potrebbe non essere efficace per lo sviluppo del concetto di incognita poiché non favorisce la 'manipolazione matematica': come posso agire su qualcosa che non è presente?*

121. Kasim: Io farei così: smonto il numero 11 in 10 più 1.[44]
122. I: Perché puoi farlo?
123. Kasim: Perché tanto 10+1 è la forma non canonica di 11, quindi sono uguali, sono lo stesso numero.
124. I: Bene, ora spiega come vai avanti.
125. Kasim: Poi l'uno lo sposto vicino a 14 *(e lo riscrive)*.
126. I: Per poterlo avvicinare e spostare che proprietà usi?[45] [46]
127. Kasim: Uso la proprietà commutativa perché dice che posso spostarli.
128. I: Spiega con più parole la proprietà commutativa, cosa sposti?
129. Kasim: I numeri.
130. Diversi: Gli addendi.
131. I: Kasim, prova a ridire meglio.
132. Kasim: Se cambio il posto agli addendi il risultato è lo stesso.
133. I: Ok, continua a dirci cosa stavi facendo.
134. Kasim: Allora ho messo 1 vicino a 14 e a questo punto al posto di 14+1 scrivo il 15.
135. I: Spiega perché…
136. Kasim: Perché 14+1 è il 15.
137. I: Ottimo, ma dillo con più parole.
138. Kasim: 14+1 è la forma non canonica del 15[47] che è la forma canonica di 15, quindi sono lo stesso numero, quindi se ora ho 15 di qua e di là dall'uguale, nel quadratino deve esserci per forza il 10, solo così la parte a destra e a sinistra dell'uguale sono uguali.
139. I: Prova a dimostrarlo con i colori.
140. Kasim: 15 *(e lo colora)* è di qua e di là, e allora ora rimane solo il 10 che deve essere anche di là nel quadratino perché siano uguali.[48]



[44] *Sarebbe meglio dire "Sostituisco la rappresentazione canonica '11' con la rappresentazione non canonica '10+1'. Ritengo che l'insegnante abbia dotato gli alunni di competenze sul piano concettuale e linguistico che permettono di superare riferimenti fortemente operativi come 'smonto'.*

[45] *Rifacendomi a miei commenti precedenti, si potrebbe puntare al fatto che gli alunni si abituino a gestire in autonomia la costruzione di un'argomentazione. Naturalmente questo comporta che essi diventino consapevoli di quello che è opportuno / necessario dire.*

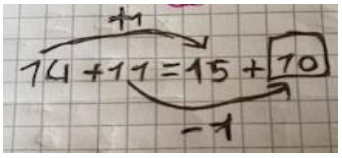
[46] *Anche in questo caso, vale quanto osservato al Com-9. Mi limito inoltre a far notare la quantità di interruzioni che subisce l'argomentazione di Kasim (110-141) ed evito di ripetermi in quanto mi sono già espressa in merito a questa consuetudine (Com-13, Com-15 e Com-20). Aggiungo solo che interrompere così di frequente l'alunno potrebbe creare il rischio che in futuro sia lui stesso ad interrompersi, poiché abituato al fatto che ogni sua osservazione deve essere approvata dall'insegnante. Non credo sia necessario soffermarsi su quanto l'eventuale attesa di approvazione sia inconciliabile con lo sviluppo dell'autonomia degli alunni e su quanto possa creare problemi di devoluzione (invito alla lettura della definizione del termine* 'Devoluzione' *nel "Quadro Teorico e Glossario del Progetto ArAl", Navarra, 2024).*

[47] *Rileggendo mi rendo conto che usano sempre la parola "forma" e mai o poco la parola "rappresentazione". Devo abituarli ad usarle entrambe indifferentemente. D'accordo. Aggiungo solo che l'argomentazione di Kasim, costruita ora attraverso le sollecitazioni dell'insegnante, confermi l'ipotesi che un alunno che si trovi nella zona prossimale di sviluppo (come lui) possa imparare a fare altrettanto da solo, decidendo cosa dire e come dirlo. Altri compagni potrebbero poi integrare la sua argomentazione aggiungendo cose che lui si è dimenticato di dire.*

[48] *Forse la mia osservazione al Com-41 era eccessivamente scrupolosa: Kasim dimostra di aver perfettamente compreso cosa significhi confrontare senza calcolare e non fa mai riferimenti al calcolo, come del resto non li ha fatto nessun alunno durante lo svolgimento dell'intera attività. Approfondisco questo aspetto nel commento finale.*

141. I: Quindi ricapitolando[49] chi prova a dirmi cosa abbiamo fatto… abbiamo sostituito un numero in forma canonica…
142. Egle: Con la sua forma non canonica.
143. I: Poi applicando la proprietà commutativa…
144. Egle: Li abbiamo avvicinati e li abbiamo sostituiti con la forma canonica, e poi con i colori si vedeva meglio che erano uguali a destra e a sinistra se nel quadratino scrivevo 10.
145. I: Bravi! Abbiamo dimostrato che questa uguaglianza, scrivendo 10 nel quadratino, era corretta![50]

. .[51]



. .[52]

---

[49] *Cercavo di far venir fuori quali strumenti hanno utilizzato per verificare l'uguaglianza... ma dovevo far ricapitolare a Egle o ad altri bambini in autonomia. Devo delegare di più, per renderli più autonomi nella verbalizzazione, invece riascoltando mi rendo conto di essere intervenuta troppo. La presa di consapevolezza da parte dell'insegnante è ammirevole ed è prova dell'alta valenza formativa dei Diari, il cui obiettivo, oltre essere strumenti di ricerca per il Progetto ArAl, è proprio quello di permettere agli insegnanti di riflettere a freddo sul proprio operato (e su quello altrui), analizzarlo, valutarlo, ed eventualmente modificarlo e migliorarlo. Sono sicura che l'insegnante di classe abbia tratto beneficio dalla lettura di questa trascrizione e che farà tesoro dei suggerimenti forniti nei commenti.*

[50] *Anche qui al termine della verifica dell'uguaglianza dovevo far rileggere per intero l'uguaglianza, in modo globale. Ciò che commenta l'insegnante mi trova d'accordo ma bisogna considerare anche che gli alunni erano stanchi (l'attività è durata più di un'ora) e che Egle, come Kasim (Com-48), ha già mostrato un'ottima padronanza della competenza CsC; quindi, giunti alla conclusione dell'attività, non affaticarla è una scelta condivisibile. Se gli alunni non fossero stati affaticati, avrei suggerito di riflettere su come altri valori del numero misterioso avrebbero modificato la scrittura (come fatto per l'uguaglianza (40)).*

[51] *Interrompo qui, perché è finito l'orario della lezione, avevo sperato che venisse fuori anche il ragionamento sul confronto tra gli addendi: se un addendo è più grande di una unità allora l'altro deve essere più piccolo di una unità… In realtà, dopo, controllando i quaderni, mi accorgo che alcuni avevano impostato anche quest'ultimo ragionamento… Vale quanto affermato in Com-50: gli alunni avevano già lavorato molto, forse non era il momento opportuno per aggiungere altre considerazioni. Ci lavorerete la prossima volta, magari partendo proprio da ciò che hanno scritto i bambini sul quaderno (e qui ritorna l'importanza, anche per gli insegnanti, del fatto che gli alunni prendano appunti e 'appoggino il pensiero' (Com-38)).*

[52] *Alcune considerazioni di sintesi:*

- *desidero congratularmi con l'insegnante: riprendendo quanto commentato in Com-36, ha decisamente 'spremuto il limone', ossia ha didatticamente sfruttato al meglio le uguaglianze proposte, suggerendo per ognuna considerazioni matematiche che ampliavano e arricchivano il ragionamento e stimolavano le riflessioni degli alunni, non limitandosi quindi a 'svolgere il compitino' ma mettendo alla prova il gruppo classe;*
- *d'altra parte, la 'spremitura' è avvenuta spesso interferendo con il ragionamento degli alunni, i quali difficilmente sono stati lasciati liberi di impostare autonomamente le proprie argomentazioni;*
- *è pur vero che i bambini (probabilmente perché abituati alla frequenza delle domande dell'insegnante) rispondevano con prontezza e pertinenza alle richieste, utilizzando efficacemente il lessico specifico appreso e riuscendo ad esprimere con periodi ben articolati concetti anche molto complessi da gestire. Difficilmente infatti vi sono stati fraintendimenti o ambiguità negli scambi tra insegnante e alunni e tra gli alunni stessi, sintomo di un'ottima preparazione e di una profonda conoscenza del significato matematico dei termini utilizzati;*
- *riprendendo quanto evidenziato nel Com-4, giunta alla fine della lettura del Diario, confermo le mie impressioni: hanno preso attivamente parte all'attività meno della metà degli alunni: suggerisco di curare maggiormente l'aspetto partecipativo, a prescindere dal livello di difficoltà dell'attività che si propone;*
- *va comunque sottolineato che tutti coloro che sono interventi sembra che abbiano fatto proprio il senso profondo di attività di CsC: nessuno accenna mai a un calcolo 'globale' ma anzi tutti adottano efficaci strategie di confronto: emblematico in tal senso che nessuno utilizzi mai l'espressione 'fa' – del tipo 'Tre per cinque* fa *quindici' – ulteriore conferma di un* approccio relazionale ai contenuti, *sia da parte dell'insegnante sia da parte degli alunni.*