13 dicembre 2023
1

Commenti *Giancarlo Navarra*

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE: La classe 2 è composta da 12 alunni, 6 femmine e 6 maschi.

PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ: L'insegnante propone l'osservazione della griglia al fine di individuare delle regolarità che dovranno essere esplicitate dai bambini usando termini appropriati.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

1. I: Osserviamo questa griglia, cosa notate?
2. Ed: Che arriva a 99.
3. I: Arriva a 99, benissimo.
4. El: Che invece di partire da uno, parte dallo zero.[1]
5. I: Quindi parte…
6. El: … parte dallo zero e finisce al novantanove.
7. I: Perfetto!
8. No: Che finisce sempre con il 9: 9, 19, 29…
9. I: Cosa finisce sempre con il 9?
10. No: Verticale.[2]
11. I: Dobbiamo chiarire alcune cose: la verticale è una…[3]

---

[1] *Il diario evidenzia come l'insegnante conduca la discussione stimolando continuamente la verbalizzazione, e come gli alunni partecipino molto attivamente. Ci sono però degli aspetti che metterò di volta in volta in evidenza e che meritano di essere migliorati. Inizio in questo caso osservando che termini del linguaggio comune come 'partire' vengono spesso usati anche in un contesto aritmetico, e gli insegnanti lasciano correre. Per esempio, alla secondaria di primo grado, è frequente sentire alunni che descrivono un segmento dicendo che 'parte da A e arriva a B', oppure che in un grafico sul piano cartesiano la retta 'parte dall'origine'. Ritengo che, da un lato, data l'età degli alunni, si possano accettare queste 'contaminazioni linguistiche', ma che allo stesso tempo vadano inserite in una riflessione collettiva chiarendo proprio che il 'parlare di matematica' comporta un uso più attento dei termini ed è bene che ogni alunno impari a curare la correttezza del suo linguaggio. Per esempio si può suggerire l'uso di 'iniziare da' al posto di 'partire'.*

[2] *Invito l'insegnante, proprio perché sta costruendo un ambiente favorevole alla verbalizzazione, a non accettare interventi come questo, formati da una o due parole. È efficace aprire ogni tanto delle brevi riflessioni sul modo di costruire le verbalizzazioni puntando sul* principio di devoluzione *(Brosusseau), in modo da rendere gli alunni sempre più consapevoli che è una loro responsabilità scegliere di non limitarsi poche parole 'discendenti' da quelle che ha detto poco prima l'insegnante. Se poi lei si accorge che, nonostante questo, la classe (tutta o in parte) continua ad esprimersi in modo approssimativo, riapra pure la riflessione.*

[3] *Mi riferisco qui ad un'abitudine dell'insegnante di impostare con gli alunni scambi verbali che nel Progetto ArAl definiamo 'di completamento'; ad esempio:*
(11) "la verticale è una… ?" (12) "… striscia, colonna"
(13) "quando invece dobbiamo guardare i numeri in orizzontale dovrà usare…" (14) "… riga".
(15) "Quindi questa è una riga e questa è una…?" (16) "… colonna".

12. Bambini: … striscia, colonna.
13. I: Quando uno di noi deve parlare dei numeri che sono in verticale, userà la parola 'colonna', quando invece dobbiamo guardare i numeri in orizzontale dovrà usare….
14. Bambini: … riga.
15. I: Quindi questa è una riga e questa è una…
16. Bambini: … colonna.
17. I: Cosa succede quando si incrociano?
18. Ed: Diventa una croce.
19. I: Esatto, diventa una croce. E c'è un punto di… ?
20. Bambini: … riferi… punto di incrocio!
21. I: E dove si incrociano?
22. An: In una casella!
23. I: Quindi questa è una casella.
24. An: Dove ci abita il numero.
25. I: Esatto. Torniamo a noi. No, adesso che sai le parole che devi usare, spiegaci cosa dobbiamo guardare. [4]
26. No: Dobbiamo guardare la colonna.
27. I: Quale colonna?
28. No: L'ultima colonna. Se noi guardiamo l'ultima colonna… finisce sempre con il 9.
29. I: Cosa finisce sempre con il 9?
30. No: Tipo il 9.
31. I: Cosa finisce?
32. Da: La cifra del numero.
33. I: La cifra, quale? Perché il numero ha anche due cifre.
34. No: Sì, la cifra 9, la cifra 10, la cifra 20, la cifra 30.
35. I: Secondo te, c'è la cifra 10, la cifra 20, la cifra 30?
36. No: No!
37. I: No, però lo stai dicendo... Ricomincia.
38. NO: Nell'ultima colonna finisce sempre con il 9, il numero!
39. I: I numeri terminano sempre con il 9. Si può dire in un altro modo?
40. El: Sì, nell'ultima colonna parti dal 9 e ci sono il 19 che finisce con il 9, una decina e finisce con il 9; venti…, sono tutti numeri che finiscono con la cifra 9.
41. I: Va bene, ma la cifra 9, dov'è?
42. An: Nella colonna del 9… no… nell'ultima colonna, nella decima colonna, la cifra delle unità è sempre uguale a 9, invece la cifra delle decine aumenta sempre di una decina.
43. I: La cifra della decina aumenta sempre di uno.
44. An: Ah sì, aumenta sempre di uno.
45. I: Quindi al numero, passando da qua a qua, cosa succede? *(scendo in verticale)*
46. El: Aumenta di 10 e cambia solo la cifra della decina.
47. I: Quindi, nell'ultima colonna ci sono tutti i numeri che hanno alle unità la cifra 9, mentre la cifra delle decine aumenta di 1.

---

(19) E c'è un punto di… ?" (20) "… riferi… punto di incrocio!"
(61) "Dipende da… ?" (62) "… dal verso!"
(84) "Tutti i numeri della prima colonna hanno lo zero…" (85) "… alle unità".
(97) "avrò tutti i numeri…" (98) "… con due cifre uguali".
Nel mio libro (NAV) scrivo 'Le domande formulate in questo modo sono riferite a 'micro-universi chiusi', contengono in sé il suggerimento di ciò su cui gli alunni si devono concentrare. Siccome la formulazione la organizza l'insegnante, questo comporta la certezza che è proprio lì che bisogna andare a parare. Se un alunno avesse in mente una risposta diversa la considererebbe certamente sbagliata. L'attenzione si allontana dagli aspetti concettuali e si concentra sulla preoccupazione di capire cosa voglia l'insegnante'.

[4] *Credo che convenga negoziare con la classe i termini da usare nelle argomentazioni rendendoli 'ufficiali'; l'ho fatto anche in una delle classi l'ultima volta che sono venuto da voi. Per esempio: 'Numero', 'cifra delle unità', 'cifra delle decine', 'riga', 'colonna', 'incrocio', 'casella', 'alto', 'basso', 'destra', 'sinistra', 'diagonale'. Non è semplice per bambini di questa età saper gestire una varietà così ampia di termini, ma bisogna comunque stimolare a farlo, in quanto è un aspetto importante dello sviluppo del* balbettio algebrico*. Una buona verbalizzazione ha anche un altro vantaggio: migliora l'efficacia degli scambi a beneficio della qualità complessiva della discussione. Do un esempio di un possibile miglioramento della verbalizzazione (un altro esempio nel commento 7):*
(28) "finisce sempre con il nove" ""la cifra delle unità è 9" (si può così ridurre il lungo scambio 26-42).

48. An: Però se andiamo da giù a su, diminuiscono.
49. I: Cosa diminuiscono?
50. An: La cifra delle decine.
51. I: Quindi tu stai dicendo che le cose cambiano…[5]
52. An: Sì.
53. I: An ha detto una cosa molto interessante, l'avete sentita?
54. Bambini: Siìì.
55. I: Cosa ha detto?
56. Al: Se guardi da su a giù, cambia la decina una in più, invece se parti dal basso diminuisce la decina.[6]
57. I: Siamo d'accordo?
58. Bambini: Siìì.
59. I: Dipende da cosa?
60. Bambini: Dipende da come la guardi!
61. I: Dipende da…
62. Bambini: … dal verso![7]
63. I: Se vado verso l'alto, oppure verso il basso. Siamo tutti d'accordo? Possiamo scrivere una regola?
64. An: Sì.
65. I: Se io scendo in verticale, vado verso il basso…
66. An: La cifra delle decine aumenta. Se vado dal basso verso l'alto, la cifra delle decine diminuisce.
67. I: Ci siamo?
68. Bambini: Siìì.
69. Da: Anche dallo zero in giù c'è sempre lo zero, però inizia ad esserci anche davanti alle decine.
70. I: Ok, prova a spiegare un pochino meglio. Cosa stai guardando innanzitutto?
71. Da: La prima colonna.
72. I: Occhi sulla prima colonna. Cosa noti?
73. Da: Noto che c'è lo zero ogni… ogni dietro.
74. I: Ogni dietro, il dietro cos'è?
75. Da: Dietro alle decine.
76. I: E cosa c'è dietro alle decine?
77. Da: Lo zero.
78. I: Sì, lo zero, ma come si chiama?
79. *El suggerisce.*
80. Da: Le unità.
81. I: Quindi i numeri della prima colonna…
82. Da: Hanno lo zero alle unità.
83. I: Esatto, hanno la cifra zero alle unità.
84. Da: Tutti i numeri della prima colonna hanno lo zero…
85. Mas: …alle unità, c'è la cifra zero.
86. I: Vuoi spiegare cosa succede alla cifra delle decine?
87. Da: Sì, se parti da 90, diminuiscono le decine, perché togli sempre 10.
88. I: Se sali…
89. Da: Se sali la cifra delle decine diminuisce di 1, se scendi verso il basso la cifra delle decine cresce di 1.

---

[5] *Invito, dopo uno scambio in cui una certa frase è stata costruita a due mani (come in 47-50), chiedere all'alunno che ha fatto la 'scoperta' di organizzarla da solo; ad esempio potrebbe dire "Nell'ultima colonna, salendo, la cifra delle unità resta il 9 e la cifra delle decine diminuisce di una unità". Se necessario, l'insegnante potrebbe accompagnare in silenzio la costruzione della frase indicando le parti della griglia che l'alunno dovrebbe nominare. In questo caso, per esempio: "Nell'ultima* (indica) *colonna, salendo, la cifra* (indica) *delle unità resta il* (indica) *9 e la cifra* (indica) *delle decine diminuisce* (indica) *di una unità". Giungere alla fine di una frase così lunga e articolata come questa dà anche la soddisfazione all'autore di essere (come spiego in NAV) un 'produttore di pensiero matematico'.*

[6] *Un altro esempio di miglioramento della frase (se necessario col contributo silenzioso e gestuale dell'insegnante) mirante ad un 'profumo di generalizzazione' (quella che l'insegnante (63) chiama 'regola', ma col tempo potrebbe chiamare 'regolarità): l'originale "Se guardi da su a giù, cambia la decina una in più, invece se parti dal basso diminuisce la decina" potrebbe diventare "Se scendi lungo una* (indica) *colonna la cifra delle* (indica) *decine aumenta di un'unità, invece se sali* (indica) *la cifra delle* (indica) *decine diminuisce di un'unità".*

[7] *Ottima terminologia!*

90. An: Oh, così si vede il ragionamento, altrimenti sarebbe opaco.[8]
91. Al: Se tu vai nella prima colonna e se vai in orizzontale… cioè… così, *(mette la mano in diagonale*) come si dice?
92. I: Diagonale.
93. Al: Se vai in diagonale e parti da 0, poi ci sono due 1, due 2, due 3, due 4…
94. I: Riuscite a vederli?
95. An: Sì, aumenta sempre di 11.
96. Bambini: È vero!
97. I: Se vado in diagonale in questo modo, parto dallo zero e vado in diagonale così, avrò tutti i numeri…
98. Bambini: … con due cifre uguali.
99. Da: Tipo le doppie.
100. I: Sì, come le doppie del linguaggio naturale, esatto. Nel linguaggio matematico abbiamo due cifre uguali e nel linguaggio naturale abbiamo le doppie: doppia l, doppia m… mamma, nonna…
101. An: Perché 11+11 è uguale a 22, 22+22 è uguale a 44…
102. I: 22+22 è uguale a 44…allora non torna!
103. An: Ah, 22+11 uguale a 33, 33+11 è uguale a 44…
104. I: Proviamo a segnare le cose che avete detto su un foglietto. Se vado in diagonale, da che parte?
105. An: Se vado in diagonale verso destra e verso il basso aggiungo sempre 11. Ma dall'altra parte partendo dal tabellone, se parti dal 9 in diagonale così, c'è 9, 18, 27, 36… diminuisce di 11.[9]
106. I: Diminuisce di 11?
107. Bambini: Nooo, aggiungi 9!
108. I: 9+9 che numero è?
109. Bambini: 18.
110. I: Proviamo a fare 18+9.[10]
111. Bambini: 27.
112. Siete sicuri?
113. Bambini: Siìì. *Segue la verifica del calcolo (+9) con la verbalizzazione del processo utilizzato. Successivamente si procede con la verifica della correttezza di tutti i passaggi osservabili in diagonale.*
114. An: Quindi possiamo scrivere sul foglietto una freccia…
115. I: È una regola?
116. Bambini: Sì… No…
117. I: È un caso o una regola? Succede sempre così?
118. Bambini: È una regola.
119. No: Sì maestra, ho fatto il calcolo!
120. I: Di cosa?
121. No: Dal 45 al 54.
122. I: Hai fatto +9?
123. No: Sì.
124. Al: Maestra ho capito dove diminuisce! Se partiamo dal 99 e andiamo in diagonale verso l'alto e verso sinistra, il numero diminuisce di 11.[11]

---

[8] *Anche in questo caso (69-90) un contratto didattico che esalti l'importanza di tre aspetti collegati fra loro - una verbalizzazione completa sintatticamente, l'uso di termini e allocuzioni fissati collettivamente come importanti e l'abitudine che un solo alunno costruisca il più possibile autonomamente la conclusione raggiunta – porta (compatibilmente con l'età) ad un miglioramento generale della discussione. A questo scopo è necessario, in generale, che un insegnante costruisca negli alunni una crescente e consapevole indipendenza rispetto a sé.*

[9] *Il lunghissimo intervento di An fa capire ancora una volta come l'insegnante stia lavorando molto sulla verbalizzazione, e come la classe sia pronta per un ulteriore salto di qualità nel costruire in un modo sempre più autonomo argomentazioni complete e ricche terminologicamente.*

[10] *Invito a non fare richieste procedurali come questa ("fare 18 più 9") perché conducono inesorabilmente a frasi procedurali anche da parte degli alunni: (119) "Sì maestra, ho fatto il calcolo!"; (122) "Hai fatto +9?"; (135) "faccio sempre +1"; (139) "90–10 fa 80 e 90–9 fa sicuramente 81"; (157) "Basta fare 10-9 che fa 1, quindi 90–9 fa 81"; ecc.*

[11] *Altra bella argomentazione, come anche (127); (129) forse in questo caso si sarebbe potuto chiedere di parafrasare la frase (anche indicando le parti della griglia interessate, perché non so se tutti abbiano capito l'argomentazione di El); per esempio: "Da 90* (indica) *verso l'alto-destra* (indica) *il numero diminuisce di 9 unità e si arriva* (indica) *in 81, poi* (indica) *in 72, poi* (indica) *in 63; la cifra delle decine* (indica) *diminuisce di un'unità* (indica) *e la cifra delle unità invece* (indica) *aumenta di un'unità". Un affinamento (con l'eventuale supporto gestuale dell'insegnante) si può stimolare anche negli interventi successivi.*

125. An: Abbiamo fatto le frecce alte e le frecce basse.
126. I: Se scende la freccia in diagonale, aggiunge; se sale, toglie.
127. An: Come l'argomento della cifra delle decine. Quando vai in su, in verticale, il numero cambia la cifra delle decine, quando vai in giù aumenta.
128. I: Qual è la regola? Cosa posso scrivere sul foglietto?
129. El: Se parti da 90, fai sempre meno 9, fai 90 meno 9... 81, 72 e praticamente se parti dal 90 è tipo un 10 e fai 81, 72 e cambia tutto nel senso che 0, 1, 2… cambia la cifra delle unità e delle decine.
130. I: Cosa succede alla cifra delle unità?
131. Bambini: Aumenta di 1.
132. I: E alla cifra delle decine?
133. Bambini: Diminuisce di 1.
134. I: Cosa scrivo sul foglietto? Se vado in diagonale dal basso verso l'alto e verso…
135. El: … destra… faccio sempre +1… no! Faccio sempre -9.
136. I: Meno 9?
137. El: Sì.
138. I: Verifichiamo: 90–9 è 81?
139. No: Sì, perché 90–10 fa 80 e 90–9 fa sicuramente 81.
140. *Segue discussione tra bambini sulla veridicità del calcolo appena espresso.*
141. I: Dobbiamo capire bene, cosa stiamo facendo. Forse non tutti hanno capito bene. El stava parlando del -9 e abbiamo detto: se da 90 arrivo a 81, ho tolto 9?
142. Bambini: Sì.
143. I: Se a 90 tolgo 9, ottengo 81.
144. An: 81+9 fa 90, se a 81 aggiungo 9 torno al 90.
145. I: Se a 90 tolgo 9 ottengo 81 (*diagramma sagittale alla lavagna*[12]*),* se a 81 aggiungo 9 *(dettato da bambini)* ritorno al punto di partenza, ottengo 90. È un circolo... perché addizione e sottrazione sono operazioni inverse. Vorrei però che qualcuno spiegasse come si può calcolare -9, oltre a calcolare in testa, perché prima mi sembra di aver sentito…
146. An: … un altro modo!
147. I: Sì, un modo che posso usare con il 9. Ricordate l'anno scorso con la linea dei numeri…
148. An: Ho capito!
149. Bambini: Siii, si poteva prendere l'ascensore![13] *(l'ascensore veniva richiesto dai bambini per aggiungere o togliere velocemente le decine).*
150. I: Vi viene un'idea? Come si può fare a togliere 9? Prima mi sembra di aver sentito un trucchetto, vorrei farlo sentire a tutti.
151. No: 90-5–4.
152. I: Cosa stai usando No?
153. I: Ho spezzettato il 9.
154. I: Cioè stai usando la tappa?
155. No: Sì. *(segue la scrittura alla lavagna).*
156. I: Si può fare in altro modo?
157. Al: Basta fare 10-9 che fa 1, quindi 90–9 fa 81.
158. I: Qual è la tua strategia? Come la scriviamo?
159. Al: 90–8.
160. Bambini: Nooo, 90–9.
161. No: Ha detto 10-9 che fa 1 e dopo ha detto 90–9 uguale 81!
162. Da: 90–10 no… -10+1!
163. Al: Ho fatto che sono andato direttamente al 10, ho fatto 10-9 che fa 1 e poi sono tornato al 90 e ho fatto lo stesso calcolo.

---

12 *Nel caso di un altro diario inviterei ad inserire qualche immagine.*

13 *Penso che il riferirsi alle strategie di calcolo in questa fase in cui si ricercano e si descrivono regolarità sia distraente. Sarebbe più importante far notare, per esempio, che per passare da 90 a 81 si possono seguire due strade:*

che portano a riflettere sulla composizione di operatori e sull'uguaglianza fra i due 'percorsi', che si possono rappresentare come:

90-10+1=81 e 90+1-10=81 per cui 90-10+1=90+1-10.

Si giungerebbe, per una via concettualmente più aderente alla ricerca di regolarità, a quello che esprime Da (191) riferendosi ai calcoli.

164. I: Proviamo a scriverlo in linguaggio matematico.
165. Bambini: 90 - … no era 10 *(discussione tra bambini).*
166. Bambini: 10–9 poi cancelli il 10, macché, sì, no, =90–9=… *(alla lavagna scritto sotto dettatura 10-9=90–9=81).*
167. Al: Ma uguale non è giusto, perché se no pesa di più un piatto.
168. I: Quale piatto pesa di più?
169. Al: Quello 90–9.
170. An: Ho capito, un piatto vale 1 e l'altro 81. C'è 80 di differenza!
171. I: Eh già, non è proprio lo stesso valore. Quindi questo uguale proprio non si può mettere.
172. An: L'uguale lo devi mettere quando ci va, non lo metti a caso.
173. I: Esatto, l'uguale lo metti quando ci va.
174. No: E fare il segno quello là che sembra un uguale, ma non è uguale.
175. An: Sì, la differenza.
176. No: Eh, sì.
177. An: Maestra l'uguale devi cambiarlo e devi mettere il segno della differenza.
178. I: E qual è il segno della differenza?
179. Bambini: Quello che… (*dalla registrazione non comprensibile*).
180. I: Non era il segno della differenza, ma il segno…
181. Bambini: Di non uguale.
182. I: Di non uguale. Come si può dire in linguaggio naturale "non uguale"?
183. El: Differenza.
184. I: Mmm...
185. Da: Una barra sull'uguale.
186. I: Una barra sull'uguale, quello è il simbolo matematico. In linguaggio naturale questo simbolo *(scritto alla lavagna ≠)* come lo leggo?
187. Ma: Diverso!
188. I: Non è uguale, è diverso. *(corretto alla lavagna* *10−9≠90−9=81*[14]*).* Va bene, siamo d'accordo?
189. Bambini: Siìì.
190. I: Il trucco di Al è: io penso al 10… *(completato dai bambini).* C'è un altro modo?
191. Da: Ah, ho capito! 90-10+1.
192. No: Ma come? Ero là che lo pensavo anch'io!
193. Da: Sappiamo che il 9 è più grande dell'8 e dobbiamo arrivare a 81, quindi -10+1.
194. I: Ok, tu sai già che devi arrivare a 81, ma perché –10+1? Chi me lo sa spiegare?
195. No: Perché il 9 è minore di 1, del 10.
196. I: Bravissima! 9 è minore di 1 rispetto al 10 e allora…
197. No: E allora se devo togliere 9, posso togliere 10, ma è troppo, allora dopo devo fare sempre +1.
198. I: Perché se ne togli 10…
199. Al: È più alto.
200. I: Bravo, ne abbiamo tolti…
201. Bambini: Troppi.
202. I: Quanti di più?
203. Bambini: Uno.
204. Ir: Quindi bisogna aggiungerlo.

[14] *Il segno '≠' va usato con cautela, è meglio non mescolarlo con l'uguale e usarlo solo fra due numeri.*