Motta S. Giovanni (RC)	*1*	*1*	***2***	*3*	*4*	*5*	*1*	*2*	*3*	

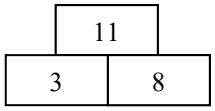
Commenti dell'I di classe
Commenti dell'E-tutor Giancarlo Navarra
Commenti di Salvatore Sini (docente SSIS, coordinatore del gruppo ArAl di Sassari)
Commenti di Carlo Pensavalle (ricercatore in Didattica della Matematica, Università degli Studi di Sassari)

10 marzo 2010 3 *(uso del registratore)*

Premessa, obiettivi, contesto in cui si colloca il diario

La classe è composta da 16 alunni: 12 maschi e 4 femmine; è coinvolta per la prima volta nella sperimentazione. Nelle precedenti attività gli alunni hanno lavorato con le minipiramidi additive scoprendone la regola e rappresentando in linguaggio matematico le relazioni tra i numeri.
Il seguente diario sviluppa l'obiettivo del curricolo:
1.c.: Riconoscere e costruire equivalenze fra rappresentazioni differenti di uno stesso numero.
1.e: Esprimersi attraverso linguaggi e sistemi di rappresentazione diversi e tradurre da un linguaggio all'altro.

L'insegnante dispone sulla cattedra una minipiramide, costruita con blocchetti di legno.

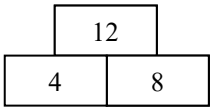


I: Bambini osservate attentamente questa minipiramide e cercate di descriverla.
Giovanna: Tre più otto è uguale a undici.
Carmelo M.: Questa minipiramide è un'addizione[1].
Nicola: Questa è una minipiramide additiva.
Violanda: Si può fare la proprietà commutativa[2].
Carmelo F. 3 è dispari e 8 è pari fa un numero dispari.
I: Prova ad esprimerti meglio cercando di spiegare in modo più chiaro ai compagni cosa vuoi dire.
Carmelo F. Tre, il mattoncino in basso a sinistra, è dispari; otto, il mattoncino in basso a destra, è pari; quello in alto è un numero dispari.[3]
I: A cosa è uguale il numero in alto se questa è una minipiramide additiva?
Antonino: Alla somma[4].
I: Bene, cercate di tradurre meglio sia in linguaggio naturale che in linguaggio matematico, in modo che anche Brioshi possa capire.
Antonino: Undici è la somma di tre e otto e scriviamo 11=3+8.
I: Riassumiamo un po' le osservazioni fatte finora.
Andrea: Undici è uguale a tre più otto; se applichiamo la proprietà commutativa undici è uguale a otto più tre.
I: Carmelo aveva detto che 8 è un numero pari e 3 è un numero dispari, la somma è uguale a un numero dispari. Proviamo con altri numeri. Nel mattoncino in basso a sinistra mettiamo7, in quello in basso a destra mettiamo 6. A cosa sarà uguale il numero in alto?[5]
Andrea: A 13, sempre un numero dispari. 7 è dispari e 6 è pari.
Si propongono altri numeri (dispari e pari alla base).

---

[1] *Tra poco l'insegnante chiederà a Carmelo F. di spiegarsi. Anche in questo caso sarebbe stato opportuno chiedere a Carmelo M. di farlo, in modo da separare il semplice supporto (la minipiramide) dall'operazione aritmetica che lo utilizza come supporto. Sarebbe stato sufficiente giungere a questo chiarimento:"Questa minipiramide* contiene (*si può dire* rappresenta, *oppure* esprime l'azione di?) *un'addizione".*
[2] *Anche qui sarebbe valsa la pena chiedere a Violanda di precisare la sua frase.*
[3] *L'osservazione di Carmelo sarà in seguito ripresa da me e porterà gli alunni all'osservazione di alcune regolarità e alla definizione di regole. Non mi è chiara una cosa: se Carmelo non avesse fatto questa osservazione, l'insegnante avrebbe fatto comunque emergere la questione dei pari e dei dispari? Gli alunni sapevano che questo era l'obiettivo della lezione? E se no, vedendo la minipiramide già completa, quale era?*
[4] *La risposta di Antonino è troppo sintetica. In casi come questo è meglio invitare l'alunno a spiegare cosa intende dire in modo che la classe si abitui a non vedere in una sola parola il concentrato di un concetto che comunque l'insegnante accetta senza richiedere ulteriori approfondimenti linguistici. Il contratto dovrebbe prevedere invece la formulazione generale completa (espressa possibilmente dallo stesso alunno) del tipo:* "Il numero in alto è la somma dei numeri nei mattoni alla base".
[5] *La minipiramide viene realizzata con altri mattoncini di legno, sulla cattedra.*

I: Se la situazione è questa, secondo voi, è possibile stabilire una regola [6]?
Andrea: La somma di un numero dispari con un numero pari è sempre[7] uguale ad un numero dispari.
Propongo un'altra minipiramide:



I: Osservate quest'altra minipiramide e ditemi cosa notate.
Alunni: I numeri sono cambiati.
Domenico: È cambiata la somma.
Giovanna: Al posto del tre c'è il quattro, ed è cambiata anche la somma.
Domenico: Di più uno.
I: Che cosa significa 'di più uno'? Spiega meglio ai tuoi compagni!
Domenico: 11 è aumentato di più uno, ed è diventato 12, perché è entrato il 4 al posto del 3.
I: Ma che altro notate? Osservate bene i numeri. [8]
Andrea: Tutti i numeri sono pari.
Nicola: La somma dodici è un numero dispari.
Domenico: Non è vero, è un numero pari perché c'è la seconda cifra che è pari.
Nicola: Sì, perché si può dividere sei e sei.[9]
I: Domenico, spiega meglio cosa intendi dire: "la seconda cifra è pari!"
Domenico: Per capire se un numero è pari si deve guardare la cifra dell'unità, il 2 che è la seconda cifra è pari. [10]
I: Per questa seconda minipiramide, secondo voi, vale sempre la regola della prima minipiramide?[11]
Alunni: No.

---

[6] Pensare di stabilire una regola generale basandosi su un numero finito di casi non favorisce la costruzione di una sensibilità algebrica nella risoluzione di un problema matematico. Lo studio di alcuni casi particolari permette di far emergere una regolarità o una proprietà invariante, sotto forma di congettura che va poi dimostrata. È meglio dire "I casi osservati ci inducono a pensare che…" oppure "Da quanto osservato, quale congettura possiamo formulare?".

[7] La risposta di Andrea, chiaramente presenta una sfida da accogliere. L'avverbio "sempre" da lui utilizzato, ci chiede di staccarci dall'osservazione sperimentale (aritmetica) e di rilanciare il problema a livello strutturale (quindi algebrico), per cogliere proprietà dei numeri naturali che ne descrivono la loro essenza.

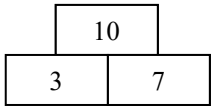
[8] I bambini stanno osservando bene i numeri! Forse per orientare meglio la discussione ed evitare che la traccia di quanto precedentemente osservato generi "rumore di fondo", conviene scegliere numeri che si distacchino da quelli usati in precedenza. Ad esempio la terna (6,10,16).

[9] Ha pensato che 12 potesse essere diviso in due parti uguali. Ha precisato, inoltre, che prima non si era accorto di aver sbagliato dicendo che 12 è un numero dispari. Nicola conosce ancora troppo poco la divisione, e siccome non possiede gli strumenti per parlare in termini di divisibilità di 12 per 2, fa trasparire questa operazione scomponendo il 12 in 6+6. In questo modo non emerge chiaramente il concetto di pari (come numero divisibile per 2 con resto 0), viene evidenziata per il momento 'solo' una delle rappresentazioni additive di 12. Suggerisco, in seguito, quando le condizioni lo consentiranno, di ritornare su questo aspetto (struttura additiva – struttura moltiplicativa). L'intervento di Nicola tuttavia apre la strada verso lo studio di una proprietà caratterizzante i numeri pari, cioè quella di poter essere "rappresentati come somma di due numeri uguali" e che può essere conquistata con l'ausilio di una rappresentazione iconica o di "modello – geometrico" di numero naturale (quello di "numero come rettangolo"). Affrontando lo studio delle possibili rappresentazioni additive di alcuni numeri naturali, abbinando ad esse un corrispondente modello – geometrico, può emergere la formulazione di una congettura sulla somma di due numeri naturali. L'attività suggerita da Sini più avanti (vedi 15) con le "torri dei pari e dei dispari" concorre al raggiungimento di una dimostrazione delle "regole" su cui si sta impostando l'esperienza.

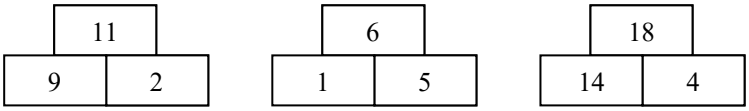
[10] Come mai Domenico dà questa spiegazione? Sarebbe utile capire da dove nasce in lui questa visione.

[11] Non mi è chiaro il senso della domanda dell'insegnante. Quale era il suo obiettivo? La 'regola della piramide' vale sempre. Che risposta si attendeva?

I: Allora, osservate attentamente e spiegate bene la regola.[12]
Domenico: Un numero pari più un numero pari è uguale ad un numero pari.
Carmelo F.: Anche cambiando di posto i numeri, alla base, cioè applicando la proprietà commutativa, la somma è sempre dodici.
Propongo un'altra minipiramide:



Domenico: Sono cambiati i numeri di sotto.
Andrea: Tre è un numero dispari, sette è un numero dispari e la somma, 10, è un numero pari.
Domenico: Si, perché zero è sempre un numero pari.[13]
Antonino: Un numero dispari più un numero dispari è uguale ad un numero pari.
Dispongo sulla cattedra altre tre minipiramidi:

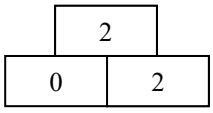


I: Come vedete sono tre minipiramidi, osservatele bene, fate le vostre riflessioni e argomentate.
Lucia: La prima minipiramide: nove più due è uguale a undici; un numero dispari più un numero pari è uguale a un numero dispari.
Carmelo M. La seconda minipiramide: uno più cinque è uguale a sei; un numero dispari più un numero dispari è uguale ad un numero pari.
Violanda: La terza minipiramide è la somma di due numeri pari.
I: Spiegati meglio!
Violanda: La somma di quattordici più quattro è uguale a diciotto e si può dire, anche, che un numero pari più un numero pari è uguale ad un numero pari.

---

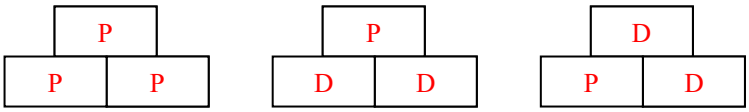
[12] *Ho delle perplessità su questa parte del percorso. L'insegnante ha chiesto se 'vale la regola della minipiramide' (che è – v. Commento 4-:'Il numero in alto è la somma dei numeri nei mattoni alla base'). La risposta corretta – pensavo - dovrebbe quindi essere 'Sì', perché la regola è strutturale rispetto al gioco delle piramidi. Ma gli alunni rispondono 'No' e l'insegnante non chiede 'Perché no?'. Poi ho cominciato a capire: quando l'insegnante chiede di 'spiegare bene la regola' non si riferisce alla 'vera' regola, ma chiama con lo stesso nome le frasi relative alla struttura dei numeri pari e dispari. Utilizzare il gioco delle piramidi per esplorare le relazioni fra pari e dispari in sé va bene, ma temo che questo uso del termine 'regola' possa creare ora e in futuro confusione negli alunni, per due motivi. Il primo, di natura matematica: non vorrei che gli alunni vedessero le relazioni additive fra i pari e i dispari legate alla* piramide*, anziché ai* numeri*. Il secondo, di natura metodologica: se l'anno prossimo l'insegnante ritornasse sulle piramidi e lavorasse su quelle a tre piani e dicesse che, per risolverle, bisogna applicare più volte – in modo diretto o inverso – la stessa 'regola della minipiramide', credo che potrebbe trovarsi di fronte delle facce perplesse che le chiedono 'Quale regola'?, perché le 'regole' sarebbero cinque: quella originale e le quattro relative all'addizione dei pari e dei dispari.*

[13] *L'osservazione di Domenico andrebbe ripresa con cura non appena possibile. Non è un fatto scontato che zero sia pari, piuttosto una conseguenza della natura dei numeri pari. Potremmo osservare che se un pari è somma di due naturali uguali, allora "zero" essendo uguale a "zero + zero" è pari. Questo discorso segue la falsa riga di quello che si può pensare di fare per un qualsiasi altro pari maggiore di "zero", anche se in generale un pari non è somma di due volte se stesso! Sarebbe utile provare a proporre la dimostrazione di tale fatto, che permette di giocare con la "dimostrazione per assurdo" in modo semplice e lineare. Vediamola. Supponiamo per un momento che "zero" sia dispari e prendiamo in considerazione la seguente minipiramide:*



In base a quanto dimostrato in precedenza la somma di un dispari, in questo caso lo "zero", con un pari, in questo caso il "due", genera un dispari. Ma come fa la somma, che in questo caso vale "due", ad essere dispari! Non può essere! È assurdo!
Ecco… c'è qualcosa che non va… cosa? L'aver supposto"zero" dispari!!!
Quindi "zero" non può che esser pari, se vogliamo che anche lui rientri in una delle due classi in cui l'insieme dei naturali resta suddiviso (la classe dei pari e quella dei dispari).

I: Tra tutte le minipiramidi prese in considerazione avete notato se ci sono delle regolarità comuni, anche se i numeri dei mattoncini sono diversi?
Alunni: Si![14]
I: Trovate un modo per rappresentare la regola senza numeri, che vada bene, però, per altre minipiramidi con numeri diversi, ma con uguale caratteristica.[15]
Si disegnano alla lavagna tre minipiramidi senza numeri.
Segue immediatamente una discussione e un confronto collettivo che porta a completare le minipiramidi così come segue.[16]



Sul quaderno gli alunni registrano queste ultime minipiramidi e, per ciascuna di esse, traducono la regola scoperta in linguaggio naturale e in linguaggio matematico.
Queste le traduzioni scritte:

- La somma di due numeri pari è uguale ad un numero pari.
  P+P=P
- La somma di due numeri dispari è uguale ad un numero pari.
  D+D=P
- La somma di un numero pari e un numero dispari è uguale ad un numero dispari.
  P+D=D
- La somma di un numero dispari e un numero pari è uguale ad un numero dispari.
  D+P=D

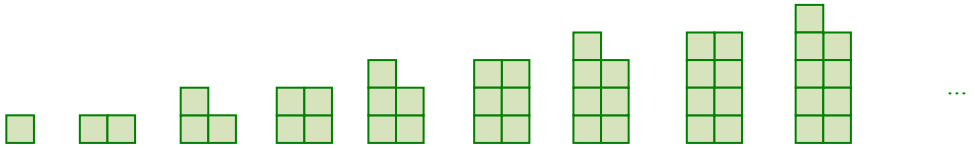
L'attività si conclude.

→ *pagina successiva*

[14] *Sarebbe stato più produttivo non accontentarsi di un generico 'Sì', ma far emergere le regolarità comuni: quali si aspettava l'insegnante?*
[15] *Mi sembra che il passaggio sia tosto perché comporta il passaggio alla generalizzazione e all'uso delle lettere (che suppongo sia stato avviato in forma di gioco attraverso altre situazioni). Non mi meraviglierei se gli alunni vedessero 'P' come iniziale di 'Pari' e 'D' come iniziale di 'Dispari' e non come 'qualunque numero pari' e 'qualunque numero dispari'. Conviene, comunque, che l'insegnante faccia esplorare queste relazioni anche al di fuori del contesto piramidi, proprio per consolidare l'idea che sono questioni valide sempre e che non sono 'regole delle piramidi'. È del tutto normale l'aggancio al concreto rimanga forte, soprattutto con gli alunni più piccoli, che rimangono legati alla situazione problematica iniziale, e quindi al contesto, in cui si sono 'sporcati le mani', perché è quella che conferisce un significato rassicurante alle loro scoperte. Questo accade con tutte le metafore. Per esempio, con la bilancia a piatti, se si rimane per troppo tempo legati all'esperienza concreta, gli alunni, anche a distanza di settimane o di mesi, continuano a parlare di 'piatti', 'pesi', 'princìpi della bilancia'.*
[16] *Sarebbe stato interessante conoscere la discussione e il confronto collettivo.*

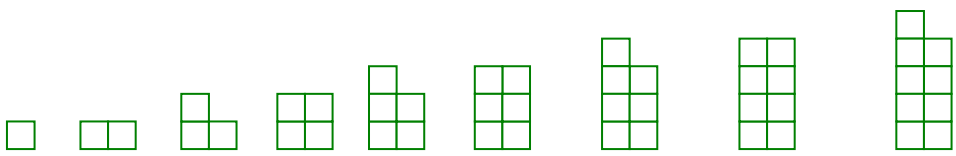
.[17]

[17] *L'insegnante nella premessa ha dichiarato che la classe ha in precedenza lavorato con le minipiramidi additive e che in questa lezione si proponeva di condurre la classe:*
1) verso la scoperta di rappresentazioni diverse di uno stesso numero per far sì che gli alunni riconoscessero e scrivessero equivalenze. Ad esempio: 8+3=7+4; 7+4=6+5 e così via.
2) ad esprimersi attraverso linguaggi e sistemi di rappresentazione diversi e tradurre da un linguaggio all'altro.
Nella lezione, però, di questi obiettivi non c'è traccia.
Carmelo F. ha modificato la rotta di navigazione, che sicuramente era stata già percorsa in precedenti lezioni, e l'insegnante l'ha seguito. Non si comprende come l'alunno sia arrivato a concludere che P+D=D. È una sua scoperta o ripete una conclusione conquistata in precedenza?
Anche la dichiarazione dell'alunno che se si osserva la cifra delle unità di un numero, e questa è pari, allora anche il numero è pari, è una conclusione alla quale il bambino è arrivato da solo o ripete una conclusione ormai conquistata? Sarebbe interessante conoscere attraverso quale percorso l'insegnante ha condotto la classe a questa conclusione.
La frase di Domenico ('Per capire se un numero è pari si deve guardare la cifra dell'unità, il 2 che è la seconda cifra è pari') *fa capire la strada seguita dall'insegnante per introdurre questo concetto. È vero che nella pratica l'ultima cifra è determinante, ma così facendo si fa lavorare la classe in ambito aritmetico* senza una prospettiva algebrica.
Schematizzo un'attività che procede in una direzione di pensiero pre-algebrico. Facciamo giocare i bambini facendogli disporre delle tessere quadrate su due colonne; essi possono costruire man mano una sequenza di numeri dispari e di numeri pari alternati e percepire in modo evidente quel quadratino in più:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

Gli alunni vengono quindi invitati a registrare le costruzioni su un foglio quadrettato e a porsi delle domande su come si possano tradurre dal linguaggio iconico a quello aritmetico tali rappresentazioni. Questo potrebbe essere il risultato di questo lavoro (il livello delle scritture dipende dalla dimestichezza con la moltiplicazione):



												…	…
1	2	2+1	2+2	2+2+1	2+2+2	2+2+2+1	2+2+2+2	2+2+2+2+1					
					3+3	3+3+1	4+4	4+4+1	…	n + n	…	n+n+1	
			2×2	2×2+1	2×3	2×3+1	2×4	2×4+1	…	2n	…	2n+1	
				2×3 – 1		2×4 – 1		2×5 – 1			…	2n - 1	

Le rappresentazioni dei numeri pari in forma 2+2, 3+3, 4+4, … e 2×2, 2×3, 2×4, … favoriscono la costruzione delle premesse che consentiranno di arrivare in seguito (in terza, se le condizioni lo consentiranno, o dopo) alla rappresentazione algebrica n + n come numero pari, da interpretare come equivalente a 2n (=2×n=n×2).
Allo stesso modo, le rappresentazioni iconiche dei numeri dispari 2+2+1, 3+3+1, 4+4+1, … e 2×2+1, 2×3+1, 2×4+1, … permettono di conquistare n+n+1, e questo aiuta a raggiungere la rappresentazione 2n+1 (=2×n+1=n×2+1) oppure quelle del tipo 2×3–1, 2×4–1, 2×5–1, … permettono di conquistare n+n-1, e questo aiuta a raggiungere la rappresentazione 2n-1 (=2×n-1=n×2-1).
Inoltre: ricavando delle scritture che siano uguaglianze tra forme canoniche e non dello stesso numero – ad esempio 2×4+0=8 o 2×4+1=9 – emergono le coppie (8,2) e (9,2) alle quali corrispondono nella divisione le coppie (4,0) e (4,1) rispettivamente: (dividendo, divisore) e (quoziente, resto).