26 gennaio 2019 1

Commenti Insegnante di classe
Commenti Giancarlo Navarra
Commenti di altri insegnanti: Anna Traverso (AT)

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE: La classe 3A è composta da 17 alunni, 7 femmine e 10 maschi.

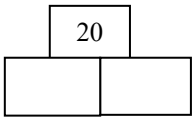
PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ: L'insegnante propone una minipiramide prendendo spunto dai numeri che compongono la classe. Sono presenti due colleghe come osservatrici.

1. *L'insegnante propone una minipiramide prendendo spunto dalla richiesta della maestra Rosella che vuole sapere il numero esatto dei maschi e delle femmine della classe, dopo una confusa conta degli alunni l'insegnante propone la minipiramide.*
2. I: Per risolvere questo quesito possiamo costruire una minipiramide, vi ricordate cosa sono le piramidi?
3. Thomas: Sono delle piramidi fatte di tre caselle, sui due angoli in basso [1] si scrivono due numeri e sul rettangolo in alto la somma di questi due numeri.
4. I: Quindi cosa scrivo?
5. Stefano: 10 che è il numero dei maschi e 7 che è il numero delle femmine e li scrivo in basso.
6. Camilla: E 17 lo scrivo nella casella in alto.
7. I: Siete sicuri che devo scriverlo in alto?
8. Mattia: Sì perché posso fare l'operazione 10+7 che fa 17 [2].
9. I: C'è qualcuno che può spiegarsi meglio?
10. Thomas: Sì perché in alto c'è sempre il risultato.
11. I: Potete usare un linguaggio matematico più adatto?
12. Anna: Perché sopra ci deve essere sempre la somma.
13. I: Quindi cos'è la casella sopra? [3]
14. Elena: La casella in alto è la somma delle due caselle in basso. [4]

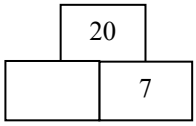
---

[1] Era più corretto dire nei due mattoni in basso invece di "nei due angoli". Certo.
[2] Mattia esprime un atteggiamento di tipo procedurale. L'insegnante dovrebbe mettere in discussione la sua frase coinvolgendo la classe nella discussione.
[3] Forse la domanda doveva essere: "Cosa scrivi nella casella in alto?"
[4] Elena si riferisce alla casella come fosse un numero. Sì, e sarebbe stato opportuno aprire una breve riflessione collettiva sul suo errore e sul significato della lettera in matematica che non indica oggetti, persone, ecc ma numeri. È sempre opportuno separare aspetti qualitativi e quantitativi; per molti alunni, per esempio, 'f' è 'una cassetta di frutta' e non 'il peso della cassetta di frutta' o 'il numero delle arance in una cassetta'. Riferendomi all'episodio 8-14 ritengo che l'insegnante, per inesperienza, non abbia colto il fatto che gli interventi 8 e 10 sono di tipo procedurale. *Probabilmente lo sono anche 12 e 14; ritengo che per Anna e Elena 'la somma' sia 'il risultato' e non la rappresentazione additiva della relazione fra i numeri nei mattoni alla base. Data l'età degli alunni, è inevitabile che i concetti si accavallino; qui mi sto rivolgendo all'insegnante, che sta imparando a cogliere le sfumature – in termini matematici – degli interventi degli alunni. Non è sufficiente formulare degli inviti generici come "C'è qualcuno che può spiegarsi meglio?" o "Potete usare un linguaggio matematico più adatto?", ma è necessario capire (e inizialmente non è facile) quando e come bisogna intervenire per evitare fraintendimenti e rendere trasparenti eventuali conflitti cognitivi. Sono molto d'accordo con il commento di Giancarlo. A tale proposito, sarebbe stato interessante invitare i bambini a confrontare l'intervento di Anna (12) con quello appena precedente di Thomas (10), infatti, mentre l'affermazione di Thomas ("Sì perché in alto c'è sempre il risultato") non ammette altra risposta che 17, cioè la forma canonica del numero, la risposta di Anna ("perché sopra ci deve essere sempre la somma"), consente anche altre possibilità, ad esempio 10+7 (forma non canonica di 17). Come spiega bene Giancarlo, la differenza nell'uso dei termini sottende una differenza di significato che a mio avviso andrebbe chiarita. Di solito i bambini, abituati a lavorare in un contesto aritmetico, imparano ad attribuire alla parola 'somma' il significato di 'risultato dell'operazione di addizione'; in tale contesto la risposta di Thomas è giustificata e corretta; ma in una prospettiva algebrica il termine 'somma' può indicare sia un prodotto (in questo caso 17), sia un processo (nel caso specifico 10+7). Fare chiarezza su questo punto assai delicato e per nulla scontato, anche per chi la matematica deve insegnarla, mi sembra importante, altrimenti può accadere che gli alunni, per corrispondere alla giusta richiesta 'di utilizzare un linguaggio matematico più adatto' (11), imparino ad usare la parola 'somma', ma continuino a considerarla un sinonimo di 'risultato'. Di conseguenza continueranno a pensare che 10+7 non è una 'somma', ma 'un'operazione'. L'insegnante avrebbe potuto suscitare negli alunni una riflessione al riguardo chiedendo ad esempio*

15. I: La maestra Rosella ha altre due classi possiamo disegnare altre due piramidi. Chiedo alla maestra di dire i numeri ma lei ricorda solo:



16. I: Bambini, sappiamo tutto di questa classe? [5]
17. Thomas: Nooo sappiamo solo la somma.
18. Joele: Sì, sappiamo tutto.
19. I: Chi non è d'accordo con Joele?
20. Mattia: Non sappiamo tutto perché non sappiamo quanti maschie quante femmine, potrebbero essere tanti i numeri [6]
21. Nico: Possiamo chiedere almeno il numero delle femmine.
22. M. Rosella: Le femmine sono 7.



23. Elena: 13, i maschi sono tredici.
24. I: Sei sicura? Come hai fatto?
25. Elena: Perché posso fare 20 meno sette e vedi che sono tredici.
26. I: Quindi cosa hai fatto praticamente? Il 13 cos'è? [7]
27. Elena: Il numero dei maschi.
28. I: E rispetto al numero in alto?
29. Elena: Un addendo?
30. I: Come si chiama il mattoncino in alto? [8] Ora conosciamo il numero nella casella in alto ed uno in basso, non è la stessa situazione di prima.

---

a Thomas: "E se, al posto del 'risultato', come dici tu, nel mattone in alto scrivessi 10+7, sarebbe giusto?" Arriverà ad affrontare la questione più avanti, facendo notare l'equivalenza tra le rappresentazioni 16 e 22-6 (61-65). (AT)

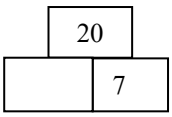
[5] Anche questa è una domanda troppo generica. Riporto un commento scritto in un diario da Donatella Lovison, esperta linguista del GISCEL, di fronte ad un caso simile, peraltro molto frequente nei diari: "È vero che il contratto con gli alunni prevede il decentramento nella costruzione delle conoscenze, ma questo genere di domande mi lascia sempre dubbiosa: hanno un carattere troppo generale e c'è il rischio concreto che i bambini osservino di tutto e di più, disperdendo le conquiste fatte nelle fasi precedenti e disorientando l'insegnante che può incontrare difficoltà a ricondurre la lezione nel giusto binario. Propendo per domande più 'orientanti', cioè che contengano nella loro formulazione delle 'parole indirizzo' che orientino verso l'obiettivo che l'insegnante si pone". Nei casi sui quali stiamo ragionando, si potrebbe dire, ad esempio (vedendo che (66) gli alunni hanno incontrato i concetti di forma canonica e non canonica di un numero): (8) "Tu parli di 'operazione' e di 'fare'. Non ti sto chiedendo cosa fai per trovare il numero in alto, ma cosa è il numero in alto"; (10) "Ti riferisci anche tu, come Mattia, a calcoli, operazioni, risultati, cioè pensi a cosa fai. 10+7 lo abbiamo visto anche in un altro modo. Vi ricordate?". La domanda 16 richiede un discorso a parte. Il nuovo problema – solo 20 nel mattone in alto – potrebbe aprire ad una interessante esplorazione, esprimibile in questo modo: quali sono i casi possibili di coppie di numeri la cui somma sia 20? (Vedi Unità 5 Le piramidi di numeri, Situazione 3, pag. 14); diventerebbe cioè un problema aperto a più soluzioni, risolvibile in modo avanzato attraverso una ricerca ordinata dei casi possibili. Così come si sviluppa nei passi successivi, invece, rimane ancorato alla realtà della classe (7 femmine, 13 maschi) e si perde questa occasione. C'è il rischio che la classe lo consideri un problema (standard) semplice avente una sola risposta, ottenibile attraverso una sottrazione (v 25).

[6] Mattia si riferisce alla ricerca delle coppie additive del 20. Può essere uno spunto per avviare la ricerca delle coppie additive?

[7] La prima parte della domanda lascia intravvedere anche nell'insegnante un retropensiero procedurale: cosa hai fatto? Cioè: che operazione hai svolto? La domanda "Il 13 cos'è?" vorrebbe forse una risposta che contenesse il termine 'differenza' ma la direzione presa dalla classe non va in questa direzione, perché domina l'idea del calcolare.

[8] L'insegnante usa la parola mattoncino ma si riferisce al numero. Certo, però gli alunni questo non lo sanno. Uno degli scopi dei diari è proprio quello di favorire nell'insegnante la riflessione a posteriori sui modi nei quali ha gestito la discussione. A questo proposito un didattico inglese della matematica molto autorevole, John Mason, nel suo Researching your own practice, the discipline of noticing *(*Fare ricerca sul proprio modo di operare: l'arte di accorgersi*), scrive: 'Ogni professionista, indipendentemente dall'ambito in cui opera, desidera saper cogliere le possibilità, essere sensibile alle situazioni e rispondere in modo appropriato. Ma ciò che si considera appropriato dipende da ciò a cui si attribuisce valore, che dipende sua volta da ciò che si è capaci di notare. [...] [Nel caso*

31. Elia: Possiamo fare 20 meno 7.
32. I: Chi vuole spiegare un po' meglio quello che ha detto Elia?
33. Nico: Posso scrivere 20 meno 7 e scrivo quanto fa e trovo il secondo addendo. [9]
34. I: Ma hai eseguito un'addizione?
35. Nico: Io ho calcolato quanto manca per arrivare a 20 da 7.
36. Stefano: Devo fare o 20 meno 7 e faccio la sottrazione e conto quanto manca per arrivare a 20 e trovo il numero.
37. I: Scrivo quello che mi dite. [10]



38. I: *scrive 20-7= numero o n°.* [11] Siete tutti d'accordo? Possiamo dare un nome più specifico a questa sottrazione? [12]
39. Anna: È una differenza.
40. I: Se dovessi spiegare a Brioshi questa situazione come potrei scrivere?
41. Stefano: 7+n° =20.
42. I: Ma Brioshi cosa può pensare della casella vuota? A quale scrittura corrisponde?
43. Thomas: Si può scrivere n° anche nella casella vuota.
44. I: Quindi N° si capisce che cos'è?
45. Stefano: Si può fare una sottrazione.

---

dell'insegnante] notare ciò che gli alunni fanno o come rispondono, valutare ciò che dicono anche contro le proprie aspettative e i propri criteri di valutazione e considerare ciò che potrebbe essere detto o fatto in seguito. È sin troppo ovvio dire che non si può intervenire su ciò che non si nota; non si può scegliere di fare qualcosa se non si ravvisa l'opportunità di farlo.' La questione allora è: Cosa dovrebbe notare l'insegnante? Chi insegnerebbe a notare questo cosa? La metodologia dei diari pluricommentati, nel momento in cui permette a ricercatori e insegnanti una riflessione congiunta a posteriori su ciò che è accaduto durante una lezione, avendo come riferimento una rete di principi teorici condivisi, è a nostro avviso uno strumento molto efficace in questo senso. Trovo fondamentale il commento di Giancarlo e il suo richiamo alle parole di John Mason. Riconoscere un problema è il primo passo per affrontarlo e risolverlo e i diari servono anche a questo. Gli insegnanti della scuola di base, per formazione, non sono abituati a interrogarsi sul significato profondo delle cose che insegnano e non affrontano alcune questioni cruciali semplicemente perché le ignorano o non ne colgono l'importanza. So che non è giusto generalizzare, ma è accaduto a me, e credo a quanti, come me, hanno basato la propria formazione matematica prima, da studenti, sugli insegnamenti ricevuti a scuola, poi sul campo, prevalentemente attraverso la pratica didattica. Porto un esempio facendo ricorso alla mia trascorsa esperienza di studente alle prese con l'algebra: il fatto di trattare alla stessa stregua lettere e numeri o di considerare un'incognita al pari di un numero conosciuto, non ha mai scalfito la mia idea che l'algebra fosse fatta essenzialmente di calcolo e di procedure, esattamente come l'aritmetica. Non ho mai indagato a fondo la questione, ma credo sia un atteggiamento piuttosto comune. Partendo da tali premesse, l'incontro con ArAl può rappresentare per un insegnante un vero e proprio sovvertimento del modo di concepire la matematica. Per me è stato così. (AT)

[9] Nico, e poco prima Elena (29), per individuare il numero sconosciuto operano una sottrazione, ma non ravvisano nel numero 13 una differenza. La loro visione della piramide è statica; i numeri non vengono definiti in base alla funzione che hanno nella relazione additiva, ma in modo indipendente dal processo che li ha generati: se il numero in alto è una somma, i numeri nei mattoni in basso possono essere solo addendi. Più avanti, rispondendo alle sollecitazioni dell'insegnante, i bambini arrivano a parlare di sottrazione e di differenza, ma rimangono sostanzialmente in un ambito procedurale. (AT)

[10] Per l'episodio 31-37 rimando al mio commento 4/r14 (4/rigo 14).

[11] Non dovrebbe essere l'insegnante a rappresentare in linguaggio matematico la differenza fra 20 e 7, ma guidare la classe a farlo e ad argomentarlo. Aggiungo che in matematica l'incognita si indica con una lettera (in questo caso è stata scelta n) e non con una lettera seguita dal tondino in alto (n°).

[12] Non è che la sottrazione 'abbia un nome più specifico', si stanno confondendo due piani.
Uno è il piano procedurale, che è quello in cui si pensa alle operazioni (in questo caso alla sottrazione 20-7), in cui il termine differenza è il nome del risultato della sottrazione – diremmo: il nome del prodotto - ed è quindi un numero (13). Su questo piano l'uguale è visto come operatore direzionale. Questo è il piano sui cui – anche se in modi spesso opachi – si sta muovendo di fatto la classe.
Poi c'è il piano relazionale, in cui non si pensa più ad operazioni, ma si parla di rappresentazioni. 20-7 non è l'operazione, ma la rappresentazione della differenza fra 20 e 7, esprime un processo (additivo nella sua forma inversa). Quando Anna (39) dice "È una differenza" su che piano si muove? Secondo me, al fondo, sul primo anche se in questo clima di costruzione del balbettio algebrico oscilla, come tutti i suoi compagni, fra i due piani (v. Stefano (45) "Si può fare una sottrazione" o Mattia (48) "n° è la differenza tra il 20 e il 7". L'insegnante dovrebbe intervenire per fare chiarezza, ma probabilmente anche lei sta ancora imparando a distinguere i due piani.

46. *L'insegnante scrive alla lavagna N° e Stefano completa con i due segni + e –.*[13]

N°= +-

47. I: Ma siete sicuri che Brioshi possa capire bene che operazione si deve fare? [14] Guardate bene n° che cos'è?
48. Mattia: n° è la differenza tra il 20 e il 7.
49. I: Bene, ora vai alla lavagna e scrivi quello che hai detto.
50. *Mattia scrive ancora n°- e non riesce a completare, poi riflettendo scrive n°=20-7.*
51. I: Bene, ora leggiamo N°, ossia il numero nascosto: è la differenza tra 20 e 7. Se volessimo dare la regola generale, come si fa a scoprire il numero nascosto? *Scrivo alla lavagna un'altra minipiramide con numeri alti e chiedo di applicare la regola* [15].

64589223	
N°	96584

52. I: *Per aiutarli faccio ripetere* Come abbiamo calcolato nella piramide precedente? [16]
53. Tutti: Il numero nascosto è la differenza tra il numero delle casella il alto e quello in basso.
54. I: Ora chiedo di venire alla lavagna e scrivere anche per la nuova piramide.
55. *Anna scrive: N° = 6458922 – 96584.*
56. I: Siamo riusciti a scrivere la regola anche se non riusciamo a calcolare?
57. *Tutti concordano.*
58. I: Ora la maestra Rosella ci scrive i numeri dei bambini dell'altra sua classe.

22	
6	

59. Wissam: Nella casella vuota scriviamo 22-6.
60. Nico: Ma non ci può stare 22-6, devo scrivere 16. [17]
61. I: Ma non è un linguaggio matematico 22-6? *Scrivo alla lavagna 22-6=16 e chiedo cosa significa il simbolo =.*
62. Nico: Che sono identici.
63. I: Ma i due numeri sono proprio uguali? [18]
64. Thomas: Hanno lo stesso valore.

---

[13] *Stefano, associando ad n entrambi i segni ('più' e 'meno'), sembra rendersi conto che, all'interno della relazione, il 'numero sconosciuto' gioca un doppio ruolo: è parte di una somma e nello stesso tempo è una differenza. Forse l'insegnante avrebbe potuto chiedere conto all'alunno di questa curiosa scrittura. (AT)*

[14] *Ai righi 49, 57 e 61 traspare il pensiero procedurale " ..come abbiamo calcolato". Forse si poteva dire "..come abbiamo completato la piramide". Sì. Vedi mio commento precedente.*

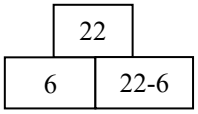
[15] *Non c'è nessuna 'regola da applicare', anche perché essa non è stata ancora verbalizzata (gli alunni lo faranno dopo, in 53). Quello che devono scrivere ora nel mattone vuoto è la differenza 64589223-96584 e verbalizzare il significato di questo numero (come in 53): "Il numero scritto nel mattone di sinistra è la differenza fra il numero in alto e quello nel mattone a destra". Ma non è possibile applicare una regola che non sia ancora stata definita. Mi chiedo: a che 'regola' pensa l'insegnante?*

[16] *Ancora una volta emerge 'dal profondo' il retropensiero procedurale ("abbiamo calcolato").*

[17] *Nella risposta di Nico persiste l'equivoco 'somma = risultato', quindi 'prodotto'. Nelle battute successive l'insegnante prova a fare chiarezza, richiamando i concetti di 'forma canonica' e 'non canonica' (vedi l'intervento di Elena, 66), ma la questione dell'interscambiabilità delle due rappresentazioni sembra rimanere sullo sfondo. (AT)*

[18] *L'uguaglianza 22-6=16 non contiene 'due numeri', bensì tre numeri e due diverse rappresentazioni equivalenti tra loro. Questo esempio è uno dei casi in cui esprimersi con chiarezza senza ricorrere al termine 'rappresentazione' è praticamente impossibile. In altri punti del diario è l'insegnante stessa a rilevare un uso scorretto o impreciso di alcuni termini (vedi 47 e 65). Questo dato mi sembra importante. Dal momento che in ArAl gli aspetti concettuali e quelli linguistici sono strettamente intrecciati tra loro, riconoscere la necessità di superare il linguaggio dell'aritmetica è una tappa fondamentale nel percorso di autoformazione dell'insegnante, ed è uno degli scogli da superare quando si abbraccia il Progetto. Il compito è reso forse più arduo quando, come in questo caso, non si deve affrontare un oggetto di lavoro completamente nuovo, ma occorre guardare da una prospettiva nuova un oggetto noto (le 'operazioni aritmetiche'), con un suo lessico ben radicato nell'uso didattico, e si deve adeguare tale linguaggio, divenuto ormai consuetudine consolidata, a questa mutata prospettiva. Non a caso il Glossario può essere considerato il 'cuore ' del Progetto o la sua 'chiave di volta' (cfr. Unità 5, Aspetti generali, 3. Il Glossario, pag. 6). (AT)*

65. I: Quindi nell'operazione possiamo dire che 22-6 ha lo stesso valore di 16? [19] Come si chiamano queste due scritture?
66. Elena: Ora mi ricordo si chiamano forma canonica e forma non canonica. Quindi 22-6 è la forma non canonica e 16 è la forma canonica.



67. I: Proviamo a scrivere 16=22-6. Cosa ne pensate?
68. Stefano: È l'operazione inversa.
69. Thomas: Nooo, si può scrivere perché è la stessa cosa. [20]
70. Camilla: Hai messo prima la forma canonica.
71. I: Quindi è corretto scrivere nella casella 22-6?
72. Camilla: Sì, potevi mettere anche n° o una stella o un punto di domanda o la forma non canonica?[21]
73. I: Bene, per oggi abbiamo finito, come vi sembra il lavoro? Cosa avete capito?
74. Anna: Ho capito che nelle piramidi quando non conosco il numero posso anche scrivere la forma non canonica. [22]
75. Elia: Ho capito che ci sono tante forme di scrittura. [23]
76. Wissan: Ho capito che le operazioni si possono scrivere anche al contrario, per esempio 10=5+5 oppure 5+5=10 [24]
77. Thomas: Che dentro alla piramide si può scrivere anche la forma non canonica.

---

[19] Usare la parola operazione ci riporta al pensiero procedurale? È l'oscillazione fra i due piani procedurale e relazionale di cui ho parlato nel mio commento 11/r38. Bisognerà che l'insegnante chiarisca un po' alla volta (in primo luogo a se stessa) questi aspetti: non si può parlare contemporaneamente di 'operazione' e di 'forme canoniche e non canoniche di un numero' perché i due riferimenti sottendono punti di vista opposti.

[20] Mentre Stefano (68) continua ad attribuire all'uguaglianza un valore direzionale (penso che l'espressione 'operazione inversa' si riferisca all'inversione dei termini), Thomas, con le parole "Si può scrivere perché è la stessa cosa", sembra cogliere il nocciolo della questione. Credo che l'intervento di Thomas meritasse maggiore attenzione, ma è pur vero che i tempi rapidi del dialogo non consentono sempre di cogliere certe sfumature di significato (perché di questo si tratta), che potrebbero indirizzare la discussione verso un terreno più proficuo. Poiché la capacità degli alunni di argomentare il proprio pensiero è ancora agli inizi, certi piccoli spostamenti di prospettiva spesso vanno letti tra le righe dei loro interventi; ciò avviene più facilmente in seconda battuta, attraverso la lettura del diario, più che durante la conduzione dell'attività. Questa è una delle ragioni per cui i diari sono uno strumento davvero prezioso. (AT)

[21] Continua la confusione concettuale. Gli alunni devono diventare consapevoli (compatibilmente con l'età, naturalmente) dei diversi significati che stanno maneggiando, altrimenti sembra che una lettera, una stella, un punto di domanda o la forma non canonica (Camilla non specifica di cosa) costituiscano quasi un minestrone in cui tutte le verdure hanno lo stesso sapore. Si può giungere a far emergere una sorta di processo evolutivo: una stella è una rappresentazione 'bambina' di un numero che non si conosce; il punto di domanda costituisce il passaggio ad una rappresentazione un po' più 'da grandi', la lettera è una rappresentazione proprio 'da grandi'. La forma non canonica di un numero è una cosa del tutto diversa dalle precedenti, perché rappresenta un numero conosciuto come processo. Questo intervento di Camilla e successivamente quello di Anna (74: "Quando non conosco il numero posso anche scrivere la forma non canonica") sono a mio avviso indicatori di un primo importante risultato della discussione: l'indipendenza tra calcolo e rappresentazione. A questo punto, e per evitare il minestrone di cui parla Giancarlo, sarebbe stato utile far riflettere la classe sul fatto che utilizzare una lettera al posto del numero sconosciuto non serve tanto ad evitare il calcolo quando i numeri sono particolarmente 'grandi (come forse lascia intendere la proposta di una piramide con numeri a 6 e 8 cifre) o a scoprire la 'regola' per arrivare a questo numero, ma offre la possibilità ben più interessante di esprimere la situazione attraverso varie parafrasi (n=22-6; 6+n=22; 22-n=6…).(AT)

[22] Anna esprime l'accavallarsi di cui ho parlato: mi sembra che per lei la forma non canonica si usi quando non si può fare il calcolo ma – forse pensa – se posso farlo, perché devo usare questa forma?

[23] Questa frase è ricca di potenzialità per i suoi sviluppi sulla pluralità delle rappresentazioni; sarebbe stato interessante chiedere a Elia di spiegarsi meglio. Concordo (AT)

[24] L'osservazione di Wissam apre una nuova pista di lavoro da affrontare. Certo, ma superando il concetto di operazione, che qui non c'entra. La 'nuova pista' alla quale allude Wissam non è altro che la puntualizzazione del significato relazionale dell'uguale al quale si può applicare la proprietà simmetrica che riguarda non le operazioni 'scritte al contrario', ma l'interscambiabilità di due rappresentazioni dello stesso numero grazie, appunto, alla proprietà (alla quale si può accennare, anche se in modo naif).