Quaderno 14

Cannucce & Bicchieri

Individuare e rappresentare relazioni fra numeri

Percorso per
la scuola dell'infanzia e la prima primaria
impostato sull'approccio al pensiero relazionale
prima dell'avvio di quello procedurale

Materiali aggiornabili con appunti e osservazioni
tratti dalle esperienze di classe

Coordinamento di Giancarlo Navarra

Premessa

Questa dispensa nasce dalla richiesta di numerose insegnanti di scuola primaria che collaborano con il progetto ArAl di poter disporre di materiali in base ai quali impostare sin dall'inizio nelle loro classi una didattica in chiave relazionale. La constatazione ormai consolidata è che la consueta didattica della matematica crei negli alunni un'impostazione mentale invasiva di tipo *procedurale* che rende difficoltoso, o addirittura inibisce con l'andare del tempo, lo sviluppo del pensiero *relazionale*. Si è elaborato quindi un approccio che *inverta* tale impostazione *anticipando l'approccio al pensiero relazionale* sin dai primi giorni della prima primaria e, ancor prima, alla scuola dell'infanzia.

L'ipotesi

Tradizionalmente in prima primaria si comincia l'aritmetica affrontando *l'universo numero* per passare poi alle *operazioni*. In tale contesto gli alunni incontrano, usano e interiorizzano i simboli '+', '-', '=' come segni *attivi* che rinforzano l'idea del *fare*: rispettivamente 'aggiungere', 'togliere', 'ottenere'. Interiorizzano cioè che, collegando due numeri mediante uno dei primi due segni, 'preparano', attraverso l'uguale, la *produzione* di un terzo numero. A conferma dell'onda lunga di questo imprinting succede di frequente, anche negli ultimi anni della scuola secondaria, che gli studenti indichino la somma da inserire nel mattone in alto di una minipiramide che abbia 16 e 15 alla base non nella forma '16+15' ma come '16+15**=31***'* e si stupiscano se si chiede perché secondo loro '=31' sia necessario scriverlo.

L'idea di fondo che si propone consiste nell'introdurre questi segni non legandoli indissolubilmente all'idea del trovare risultati ma, in una prima fase, per *rappresentare le relazioni che intercorrono fra numeri di oggetti senza pensare ai calcoli.*

In un secondo momento, quando i numeri in gioco diventeranno più grandi e non sarà più sufficiente il calcolo mentale con o senza l'aiuto delle dita o di altre strategie, si creeranno le condizioni per ampliare il significato dei simboli '+' e '-' rendendoli 'operativi'. Imparare le tecniche del calcolo non sarà quindi un *fine*, ma un *mezzo* per ampliare conoscenze e competenze acquisite in precedenza, legate alla *rappresentazione di un numero* nelle sue forme *canonica e non canonica*. L'atteggiamento procedurale sarà quindi accessorio e strumentale al continuo sviluppo del pensiero relazionale.

Come si vedrà, all'inizio della prima gli alunni verranno guidati non ad operare su due numeri per ottenerne un terzo, ma a *scomporre un numero di oggetti in gruppi di oggetti* (inizialmente due, poi questo numero può aumentare) e a riflettere sulle nuove situazioni che scaturiscono da queste azioni. Lo scopo è quindi quello di individuare e rappresentare gradualmente, attraverso i primi simboli del linguaggio matematico, i numeri e le relazioni fra di essi derivanti dalla scomposizione di un primo numero.

Nelle situazioni iniziali, in cui si costruiscono gli embrioni del pensiero relazionale, non si imparano operazioni, non si ottengono risultati.

In tutte le esperienze che seguono è implicito il costante ricorso alla *verbalizzazione* e all'*argomentazione* come mediatori verso la costruzione del pensiero matematico attraverso la graduale conquista e il controllo sui significati delle competenze acquisite o in via di acquisizione.

1. Scuola dell'infanzia e inizio prima primaria

Materiali

- Cannucce
  - L'esperienza con molte classi dell'infanzia e della prima primaria porta ad affermare che non ha importanza se esse sono di colori diversi; quando i bambini capiscono cosa devono fare non si lasciano distrarre dai colori;
  - se sono le cannucce con un'estremità pieghevole, può convenire tagliarla per evitare che alcuni si distraggano giocando con la parte mobile.
- Bicchieri
  - devono essere in numero sufficiente da distribuirne due ad ogni coppia;
  - si possono usare bicchieri normali o quelli più grandi per la birra; per andare in una direzione ecologica, suggeriamo di usare bicchieri e cannucce di materiale riciclabile;
  - per evitare che i bicchieri, una volta distribuiti, vengano tenuti lontani fra loro o che i bambini se ne approprino senza capire che i bicchieri sono a coppie, conviene attaccare ogni coppia di bicchieri su un supporto rigido (si possono usare tavolette di cartone, legno, piani neri del Sushi, …); si può ricorrere al patafix, ma si è visto che è molto efficace la colla a caldo.
  - ogni coppia di bicchieri verrà contrassegnata da due simboli in modo che siano chiaramente riconoscibili il bicchiere di destra e quello di sinistra; questo permetterà di capire che, ad esempio, 3-6 e 6-3 sono coppie diverse.

Inizia l'attività

- ognuna delle tappe seguenti è accompagnata da osservazioni fatte in classe durante le sperimentazioni e da appunti vari che possono favorire gli insegnanti che intraprenderanno il percorso;
- quando in una tappa del percorso compaiono scritture di numeri, attività o riflessioni più articolate, in quei casi termina si presume che termini l'attività per la scuola dell'infanzia. Il confine comunque è piuttosto mobile.
- L'insegnante cura costantemente verbalizzazione e argomentazione.

1. Il percorso

L'insegnante:

1. **Mostra i materiali** agli alunni e fa in modo che tutti capiscano l'accoppiamento 'simboli-destra/sinistra'.
   L'esperienza suggerisce che nell'attività introduttiva il numero di cannucce nel bicchiere dell'insegnante sia dispari. Si è visto infatti che iniziare con un numero pari, per esempio 6, genera quasi sempre la produzione spontanea dominante di una coppia di numeri uguali di cannucce nei due bicchieri (3 e 3). In una classe, dove questo è avvenuto per tutte le coppie di alunni, si è definito scherzosamente 'noiosa' la scelta.
2. **Inizia l'attività vera e propria** presentando un bicchiere con dentro un certo numero di cannucce (per esempio 7).

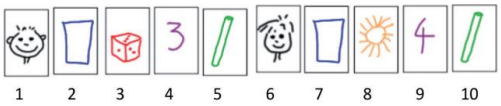
3. **Assegna ad ogni alunno** (o coppia di alunni) una coppia di bicchieri e un numero di cannucce uguale a quello dell'insegnante (7).
   Conviene controllare che i cartoncini che fanno da base ai bicchieri siano mantenuti in posizione corretta destra/sinistra per tutta la durata dell'attività;

4. **Invita gli alunni a distribuire** (può usare, chiarendo il suo significato, questo termine, migliore, per esempio di un generico 'mettere' o di 'suddividere') nel modo che preferiscono le loro cannucce nei due bicchieri senza lasciarsi influenzare da quello che fanno i compagni.
   All'inizio i bambini potrebbero essere disorientati da questa libertà 'totale' e guardarsi attorno incerti sul da farsi. In breve però svolgono la consegna.
   L'esperienza mostra come le coppie dominanti siano (nell'esempio) 3-4 o 4-3 e come sia difficile che compaiano 0-7 e 7-0.
   È necessario condividere con chiarezza un contratto controllare che i bambini non cambino le cannucce nei bicchieri dopo aver terminato il lavoro, influenzati magari da qualche altra coppia o perché ci giocherellano.

5. Quando tutte le coppie hanno terminato di distribuire le loro cannucce **chiede ad ogni coppia di spiegare il proprio lavoro**. Per esempio: "Nel bicchiere a sinistra ci sono tre cannucce e in quello di destra quattro cannucce".
   La fase della verbalizzazione è molto importante.
   Una strategia che si può adottare per favorire la verbalizzazione è quella di disegnare su dei cartoncini gli oggetti che si vorrebbe venissero citati dai bambini nelle loro frasi. Per esempio: alcuni bicchieri, delle cannucce, i simboli per segnare destra e sinistra (nell'esempio il dado e il sole), le dieci cifre, delle tesserine con gli autoritratti dei bambini:



   L'insegnante colloca alcune tesserine in sequenza costruendo così una sorta di 'sceneggiatura' della verbalizzazione e ne indica una alla volta; per esempio, seguendo questa sequenza un bambino potrebbe dire:

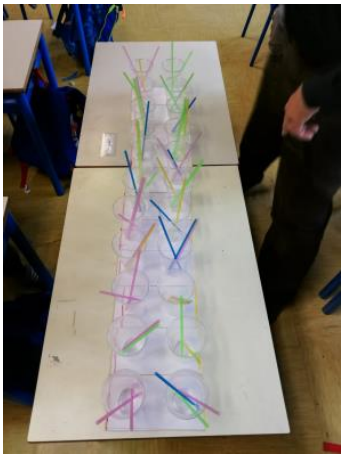


   «Luca (1) ha nel bicchiere (2) a sinistra (3) tre (4) cannucce (5) e Gina (6) ha nel bicchiere (7) di destra (8) quattro (9) cannucce (10)».
   Sarebbe molto difficile che un bambino, da solo, costruisse una frase come questa di ben 17 parole.



Infanzia: la 'sceneggiatura iconica'

6. Man mano che gli alunni terminano di verbalizzare **collocano la loro coppia di bicchieri** su di un tavolo una accanto all'altra, curando sempre che si corrispondano le disposizioni destra/sinistra.
   La distribuzione più probabile nella fase iniziale è 3-4 oppure 4-3; 1-6 o 6-1 sono rare; 0-7 o 7-0 non compaiono quasi mai. Forse vi è una propensione spontanea verso l'uguaglianza fra i due numeri, un po' come sembra 'innata' la simmetria



Prima primaria: tutte le coppie sono disposte in modo disordinato

7. **Invita gli alunni a togliere dal tavolo i doppioni**, in modo che rimanga, per ogni distribuzione nei bicchieri, una sola coppia.
   È probabile che gli alunni, all'inizio, non facciano differenza fra, per esempio, le coppie 3-4 e 4-3; sarà cura dell'insegnante indirizzare l'attenzione verso la differenza fra le due situazioni.





Infanzia: la fase dell'individuazione dei doppioni



Prima primaria: le coppie rimaste dopo la ricerca dei doppioni

8. **Invita a riflettere sulle coppie rimaste** e a cercare le coppie di bicchieri che contengano numeri di cannucce distribuiti in modi diversi da quelli trovati sino a quel momento. Gli alunni si fermano quando ritengono di aver trovato tutte le possibilità.
   È probabile che non vengano trovate le coppie 0-7 e 7-0; l'insegnante favorisce l'individuazione delle possibilità mancanti.
   Se gli insegnanti delle prime facessero scrivere ai bambini i numeri accanto ai bicchieri, questo potrebbe favorire l'individuazione delle coppie mancanti.

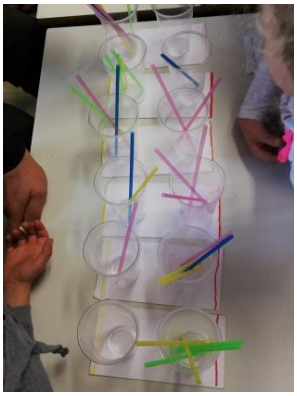
9. Quando i bambini ritengono di aver completato il controllo, **chiede di verificare** se siano state trovate tutte le coppie e suggerisce di spostarle mettendole in un modo ordinato che permetta di compiere una verifica completa.
   In genere questa fase ai bambini piace perché dopo un po' gli alunni sanno gestire la ricerca in autonomia scoprendo le coppie mancanti. I più maturi tendono ad essere più veloci perché si accorgono delle successioni crescente e decrescente.
   Le coppie di bicchieri in cui ce ne sia uno vuoto impiegano un po' di tempo per comparire; i bambini capiscono presto che la prima coppia da porre sul tavolo è 0-5. Quando questo avviene, molti associano con naturalezza al bicchiere vuoti lo 0.
   Alla fine dell'attività le coppie di bicchieri risultano poste una di seguito all'altra ordinatamente.
   L'attività può preparare il terreno per le riflessioni sui numeri 'amici' di un numero dato.
   Alcuni esempi:



Infanzia: le sei coppie da 0-5 a 5-0 disposte in modo ordinato

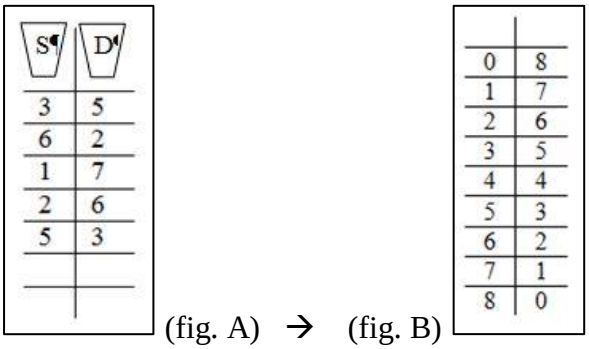


Infanzia: le sette coppie da 0-6 a 6-0 disposte in modo ordinato



Prima primaria: le sei coppie da 0-7 a 7-0 disposte in modo ordinato

10. **Fa rappresentare con un disegno** la situazione alla quale i bambini sono arrivati al punto 11.
    Il disegno deve riprodurre, nell'ordine esatto, le coppie 0-5, 1-4, 2-3, 4-5, 5-1; questo non solo per un generico senso dell'ordine, ma anche per poter effettuare un confronto con la situazione successiva (11) in cui l'insegnante inserirà nel suo bicchiere un numero pari di cannucce.
11. Sperimenta una situazione analoga **con un numero pari di cannucce**. Si ripetono le fasi 8-14.
    Si scopre la coppia di numeri uguali.
    L'insegnante può proporre attività simili con numeri diversi, sino a che ritiene che le idee degli alunni siano chiare.
12. **Si passa alla rappresentazione tabulare**; se non lo si è fatto ancora, si possono proporre i simboli per destra e sinistra con 9D' e 'S'.
    La prima rappresentazione potrebbe essere quella della situazione ancora disordinata (fig. A); in un secondo momento si passerà ad una tabella ordinata (fig. B), che raccoglierà le coppie degli 'amici' del numero di cannucce dell'insegnante:



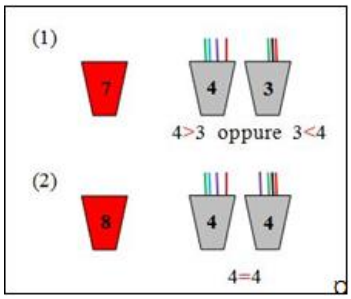
(fig. A) → (fig. B)

È successo in una prima che le prime risposte alla domanda su quale sia il significato di 'S' e 'D' siano state "Sei e Due" e "Sette e Dodici". In ogni caso l'esperienza in classe mostra che 'Sinistra' e 'Destra' emergono piuttosto rapidamente.

In alcune prime si è proposto, dopo la riflessione sulle prime tabelle, un numero 'grande': "E se le cannucce nel bicchiere dell'insegnante fossero 11 come si distribuirebbero nei due bicchieri? Cosa scrivereste in questa tabella?". È stato interessante vedere come gli alunni realizzassero che le coppie 'nascono' spontaneamente osservando il comportamento dei numeri nelle due colonne, soprattutto gli ordini crescente e decrescente). Molti hanno capito di iniziare da 0-11 e di proseguire sino a 11-0.

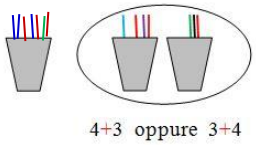
2. Dalla prima primaria

13. **Si propongono i primi simboli relazionali; si presenta Brioshi** Si confrontano i numeri di cannucce nelle coppie di bicchieri, si rappresentano in linguaggio matematico gli esiti dei confronti attraverso l'uso dei simboli '>' e '<'. L'amico di penna algebrica Brioshi[1] diventa la ragione per la quale si adottano simboli del linguaggio matematico: bisogna raccontargli le varie esperienze di C&B.
Se le cannucce iniziali sono per esempio 7, si giunge alle rappresentazioni 4>3 o 3<4.
Quando il numero iniziale è pari si scopre anche il segno =.

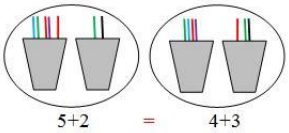


[1] V. Unità 1 della Collana ArAl: Brioshi e l'approccio al codice algebrico.

14. **Si propongono i primi simboli relazionali; si presenta Brioshi** Si rappresenta in linguaggio matematico la somma dei numeri delle cannucce nei due bicchieri

Si introduce il segno '+' come traduzione della congiunzione 'e', e come rappresentazione di quella che gli alunni imparano a concepire e a definire come somma fra due numeri (non emergono ancora né operazioni né risultati). Si introduce l'embrione della proprietà commutativa. *Gli alunni aggiornano le scritture trascrivendo sui quaderni (possono anche disegnare bicchieri e cannucce):* *0+7, 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, 7+0.* *L'introduzione di Brioshi favorisce il passaggio ai simboli come 'veicolo di comunicazione' con lui.*	 4+3 oppure 3+4

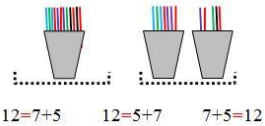
15. **Si rappresenta in linguaggio matematico** l'uguaglianza fra queste somme

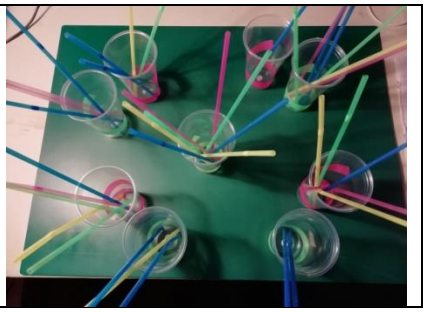
Si introduce il segno '=' fra due rappresentazioni (non esistono ancora né operazioni né risultati). *Gli alunni scrivono per esempio:* *7+0=4+3, 2+5=1+6, …* *Si può introdurre anche l'ambiente delle mascherine.*	 5+2 = 4+3

16. **Si inizia a parlare di rappresentazione canonica e non canonica**

Le cannucce iniziali ora rimangono visibili nel primo bicchiere. *Nel bicchiere rosso ci sono, per es., 10 cannucce.* *Gli alunni hanno a disposizione cannucce e bicchieri e distribuiscono 10 cannucce in coppie di bicchieri.* *Riflettono sul fatto che le quantità così distribuite si equivalgono fra loro e anche rispetto al bicchiere iniziale.*	

17. Guida a **rappresentare in linguaggio matematico l'uguaglianza fra il numero delle cannucce nel primo bicchiere (12, nell'esempio) e la somma delle cannucce negli altri due bicchieri**

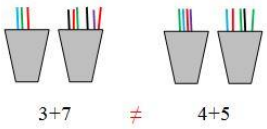
Si scopre che non ha importanza quali numeri si scrivono ai lati dell'uguale; si intravvede anche qui l'approccio alla proprietà commutativa e a quella simmetrica dell'uguaglianza (compare anche un embrione di bilancia, tratteggiato). *Al momento opportuno si possono introdurre i concetti di forma canonica e non canonica.*	 12=7+5 12=5+7 7+5=12

Gli alunni scrivono per esempio anche nei quaderni: *12=7+5 7+5=12 …* *Non emergono ancora né operazioni né risultati.*	

18. **Propone altri ambienti** per rinforzare concetti e competenze.
    Si può lavorare con la Matematochetta, le Minipiramidi, le Mascherine, il Domino.

19. **Fa il punto della situazione**: si approfondiscono concetti del linguaggio matematico: i suoi simboli, i suoi termini; **si chiarisce la differenza fra cifre e numeri**
    Brioshi aiuta a riflettere sulle scoperte fatte con cannucce e bicchieri (o con le minipiramidi, le mascherine, il domino, …). Si interpretano in questa nuova luce scritture precedenti.

20. **Introduce un nuovo simbolo legato al confronto tra due numeri: ≠.** Gli alunni lo esplorano per capirne il significato

Si propongono due coppie di bicchieri contenenti numeri differenti di cannucce e si chiede di esprimere il confronto mediante il linguaggio naturale e quello simbolico. *Nel caso di un impasse, Brioshi può inviare 'provocatoriamente' la scrittura: 3+7≠4+5. Per capire con chiarezza il senso del messaggio si può ricostruire concretamente la situazione proposta da Brioshi con bicchieri e cannucce veri (o con piattini e fagioli o qualsiasi altro supporto scelto dall'insegnante) e farli disegnate sul quaderno.*	

21. Propone **l'incognita**

 Fig.2

Per introdurre l'incognita propone una situazione di questo tipo (Fig. 2): presenta in un bicchiere 10 cannucce, in uno degli altri due bicchieri ne mette 6 e nel secondo inserisce 4 cannucce avvolte in uno scottex, in modo che non

siano visibili. La metafora del numero viene completamente accettata dalla classe per il suo significato.
Dopo aver accettato che gli alunni dicessero che dentro lo scottex ci sono 4 cannucce, in vista della rappresentazione in linguaggio matematico per Brioshi (noto alla classe) promuove un Concorso (Fig.3)

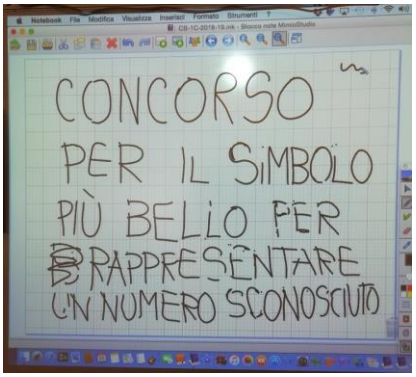


Fig.3

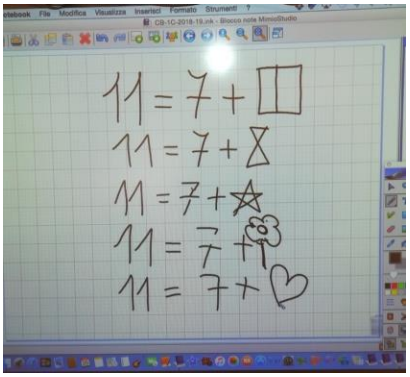
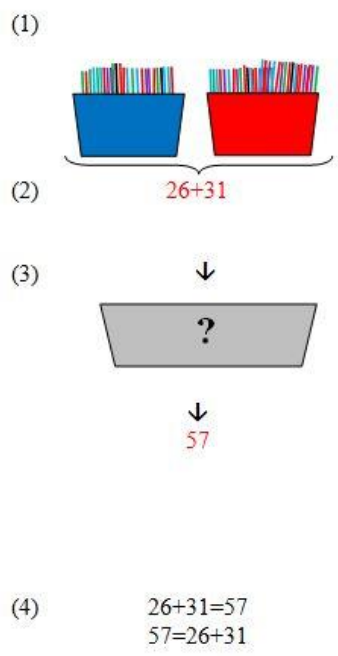


Fig.4

Nella Fig. 4 presentiamo glili esiti del concorso. Alla fine gli alunni hanno votato il libro (la prima icona).

22. **Aumenta la grandezza dei numeri; si incontra l'addizione**
Si propone una nuova situazione in cui aumenta la grandezza dei numeri delle cannucce nei bicchieri. I calcoli diventano difficili e i bambini non sanno come fare o impiegano molto tempo per calcolare. Nasce così la necessità per loro di saper 'maneggiare' numeri a più cifre. Si spiega che impareranno cose nuove che permetteranno di fare cose 'da grandi'. Si introduce 'finalmente' la prima operazione con il suo algoritmo.

(1) Si propongono due contenitori; si spiega che in quello blu ci sono, per esempio, 26 cannucce e nel rosso ce ne sono 31. Si chiede di rappresentare la loro somma. *(2) Richiamando anche precedenti esperienze con numeri piccoli, gli alunni ormai dovrebbero sapere che una rappresentazione sempre possibile della somma è quella in forma non canonica: 26+31.* *(3) Non sanno però trovare la forma canonica della somma (forse qualcuno lo trova aiutandosi con le dita; in questo caso si propongono numeri più grandi). Si spiega che ora impareranno a farlo. Si sviluppano quindi i concetti legati a unità e decine e all'algoritmo dell'addizione in colonna. Va puntualizzato costantemente che quello che si trova con questa nuova tecnica di calcolo è sì il 'risultato' 57 di un'operazione ma, cosa più importante e collegata con le esperienze precedenti, esso va interpretato soprattutto*	

come il numero totale delle cannucce nel contenitore, scritto in forma canonica, da affiancare a quello scritto prima, in forma non canonica. Se non lo si è ancora fatto, si possono introdurre ora questi termini appoggiandosi anche all'analogia fra i modi di rappresentare un bambino e quelli di rappresentare un numero. *(4) Le due rappresentazioni vanno uguagliate. Imparare come si esegue un'operazione è quindi non un fine, ma un mezzo per arricchire conoscenze e competenze precedenti legate alla rappresentazione di relazioni fra i numeri. Si potrà anche lavorare con minipiramidi, ecc.*	